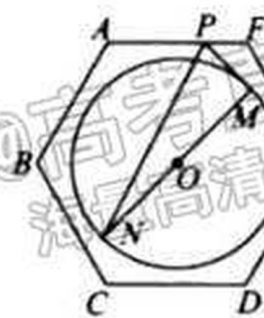


一. 选择题 (共 8 小题)

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x < 2\}$, $B = \{y | y \leq m\}$, 若 $A \cup B = B$, 则 m 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $[2, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$
2. 已知 $2z + \bar{z} = 6 + i$ (i 为虚数单位), 则 $z =$ ()
- A. $2+i$ B. $2-i$ C. $1+i$ D. $1-i$
3. 某学校为了了解新高考背景下学生的选科情况, 从本校选择“物理、化学、生物”、“物理、化学、地理、物理、生物、政治”三种组合共 600 名学生中, 采用分层抽样的方法选取 20 名学生作为样本. 已知选“物理、化学、生物”组合的学生有 240 人, 且选“物理、生物、政治”组合的人数是选“物理、化学、地理”组合的 $\frac{1}{3}$, 那么样本中选“物理、化学、生物”组合的学生比选“物理、生物、政治”组合的学生多 ()
- A. 4 人 B. 5 人 C. 6 人 D. 7 人
4. 如图正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 4, 圆 O 的圆心为正六边形的中心, 半径为 3. 若点 P 在正六边形的边上运动, MN 为圆 O 的直径, 则 $\vec{PM} \cdot \vec{PN}$ 的取值范围是 ()



- A. $[3, 7]$ B. $[6, 10]$ C. $[8, 12]$ D. $[12, 16]$
5. 由 6 个正方形和 8 个等边三角形围成的多面体如图所示, 已知如图中正方形的边长与等边三角形的边长都为 $2\sqrt{2}$, 则该几何体的体积为 ()



A. 32

B. $32\sqrt{2}$ C. $\frac{160}{3}$

D. 64

6. 已知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ($x \in \mathbf{R}$), 下面结论错误的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称

D. 函数 $f(x)$ 是偶函数

7. 设 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, 若椭圆上存在一点 P , 使 $(\vec{OP} + \vec{OF}_2) \cdot \vec{PF}_2 = 0$ (O 为坐标原点), 且 $2|\vec{PF}_1| = 3|\vec{PF}_2|$, 则椭圆的离心率为 ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{\sqrt{13}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{13}}{25}$

D. $\frac{4}{7}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x \leq 1 \\ |x-2|-1, & x > 1 \end{cases}$, 若函数 $y=f(x)$ 的图象与 $g(x) = \log_a x$ ($a > 1$)

的图象有 3 个交点, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(1, +\infty)$

B. $(1, e^2)$

C. $(\sqrt{e}, +\infty)$

D. $(1, \sqrt{e})$

二. 多选题 (共 4 小题)

9. 设正实数 a, b 满足 $a+b=1$, 则 ()

A. $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 9$

B. $2^a + 2^b > 3$

C. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$

D. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{1}{2}$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$, 则下列选项正确的有 ()

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

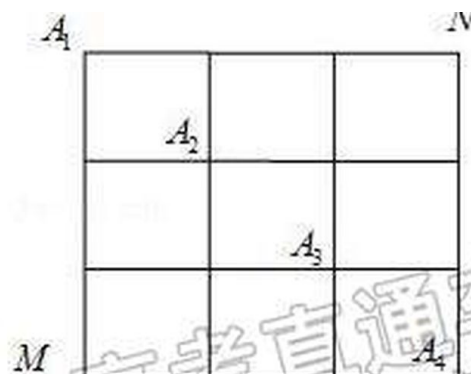
B. 曲线 $y=f(x)$ 关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 中心对称

C. $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$

D. 曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

11. 如图, 在某城市中, M, N 两地之间有整齐的方格形道路网, 其中 A_1, A_2, A_3, A_4 是道路网中位于一条对角线上的 4 个交汇处, 今在道路网 M, N 处的甲、乙两人分别要到 N, M 处, 他们分别随机选择一条沿街的最短路径, 以相同的速度同时出发, 直到到达 N, M 处为止, 则下列说法正确的是 ()





- A. 甲从 M 必须经过 A_2 到达 N 处的方法有 9 种
- B. 甲乙两人在 A_2 处相遇的概率为 $\frac{81}{100}$
- C. 甲、乙两人相遇的概率为 $\frac{41}{100}$
- D. 甲从 M 处到达 N 处的方法有 120 种
12. 已知抛物线 $x^2=8y$ 的焦点为 F , P 为抛物线上一动点, 直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 点 $M(2, 4)$, 则下列说法正确的是 ()
- A. 存在直线 l , 使得 A, B 两点关于 $x+y-2=0$ 对称
- B. $|PM|+|PF|$ 的最小值为 6
- C. 当直线 l 过焦点 F 时, 以 AF 为直径的圆与 x 轴相切
- D. 若分别以 A, B 为切点的抛物线的两条切线的交点在准线上, 则 A, B 两点的纵坐标之和的最小值为 4

三. 填空题 (共 4 小题)

13. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2=2a_1+2$, $a_5=4a_3$, 则数列 $\{a_n\}$ 中不超过 2021 的所有项的和为 _____.
14. 请写出与函数 $f(x)=e^{2x}-1$ 的图象在点 $(0, 0)$ 处具有相同切线的一个函数 $g(x)$ = _____.
15. 点 P 是直线 $y=kx-4$ 上一动点, 过点 P 作圆 $C: x^2+y^2-2y=0$ 的两条切线 PA, PB , 其中 A, B 为切点, 若四边形 $PACB$ 面积的最小值为 2, 则实数 k 的值为 _____.
16. 若 $(x+2)^{2022}=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{2022}x^{2022}$, 则 $a_0+a_2+a_4+\dots+a_{2022}$ 被 4 除得的余数为 _____.

四. 解答题 (共 6 小题)

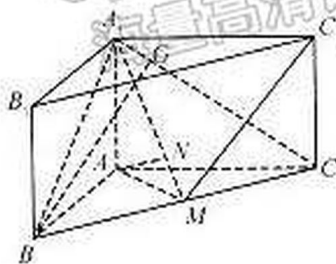
17. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, 且 $\sqrt{3}a\sin C=c\cos A+c$.
- (1) 求 A ;
- (2) 在 ① $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, ② $\triangle ABC$ 的周长为 $6+2\sqrt{3}$, ③ $\frac{c-1}{\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 这三

中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 B 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由。

问题：已知 $b=2$ ，___。

18. 如图，在侧棱垂直于底面的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=AC=\frac{2\sqrt{3}}{3}AA_1=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$ ， M 是线段 BC 的中点， N 是线段 A_1M 靠近点 M 的四等分点，点 G 在线段 A_1C 上。

- (1) 求证： $AN \perp BG$ ；
(2) 求二面角 $B-A_1M-C_1$ 的正弦值。



19. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ ，对于任意给定的正整数 t ，设不等式 $a_n - a_t \geq t^*(n-t)$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立时 t^* 的取值集合为 $T(t)$ 。

- (1) $a_n = n^2$ ，求集合 $T(2)$ ；
(2) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 d ，求 $T(t)$ ；
(3) 若对任意 $t \geq 2$ ， $t \in \mathbb{N}^*$ ， $T(t)$ 均为相同的单元数集合，证明：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列。
20. 已知双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， F_1, F_2 为双曲线的左、右焦点，离心率为 2，点 P 为双曲线在第一象限上的一点，且满足 $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = 0$ ， $|\vec{PF}_1| |\vec{PF}_2| = 6$ 。

- (1) 求双曲线的标准方程；
(2) 过点 F_2 作直线 l 交双曲线于 A, B 两点，则在 x 轴上是否存在定点 $Q(m, 0)$ 使得 $\vec{QA} \cdot \vec{QB}$ 为定值，若存在，请求出 m 的值和该定值，若不存在，请说明理由。
21. 为纪念中国共产党成立 100 周年，加深青少年对党的历史、党的知识、党的理论和路线方针的认识，激发爱党爱国热情，坚定走新时代中国特色社会主义道路的信心，某校举办了党史知识竞赛，竞赛规则是：两人一组，每一轮竞赛中，小组两人分别答 3 道题，若答对题目不少于 5 道题，则获得一个积分。已知甲乙两名同学一组，甲同学和乙同学对每道题答对的概率分别是 p_1 和 p_2 ，且每道题答对与否互不影响。

- (1) 若 $p_1 = \frac{4}{5}$ ， $p_2 = \frac{3}{4}$ ，求甲乙同学这一组在一轮竞赛中获得一个积分的概率；
(2) 若 $p_1 + p_2 = \frac{4}{3}$ ，且每轮比赛互不影响，若甲乙同学这一组想至少获得 5 个积分，那

么理论上至少要进行多少轮竞赛？

22. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 - x + 1)$.

- (1) 若 $a = -2$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 求证: 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 只有一个零点.



高考直通车
App生成

一. 选择题 (共 8 小题)

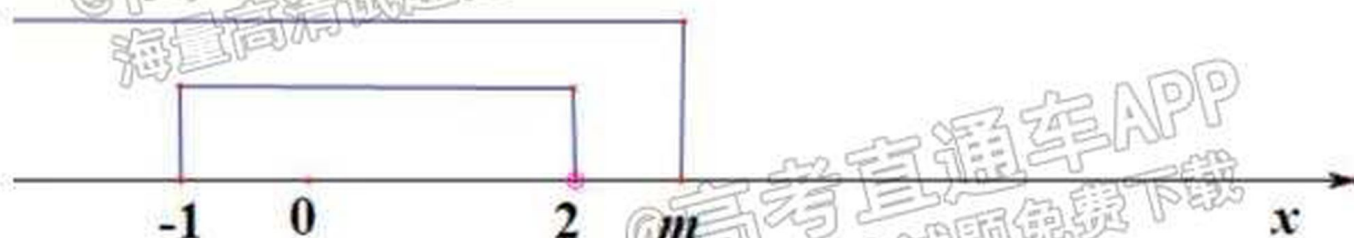
1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x < 2\}$, $B = \{y | y \leq m\}$, 若 $A \cup B = B$, 则 m 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $[2, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

解: $\because A \cup B = B, \therefore A \subseteq B$,

$\therefore m \geq 2$.

故选: C.



2. 已知 $2z + \bar{z} = 6 + i$ (i 为虚数单位), 则 $z =$ ()

A. $2 + i$ B. $2 - i$ C. $1 + i$ D. $1 - i$

解: 设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 则 $\bar{z} = a - bi$,

$\therefore 2z + \bar{z} = 6 + i$,

$\therefore 2(a + bi) + (a - bi) = 3a + bi = 6 + i$, 即 $\begin{cases} 3a = 6 \\ b = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$,

$\therefore z = 2 + i$.

故选: A.

3. 某学校为了了解新高考背景下学生的选科情况, 从本校选择“物理、化学、生物”、“物理、化学、地理、物理、生物、政治”三种组合共 600 名学生中, 采用分层抽样的方法选取 20 名学生作为样本. 已知选“物理、化学、生物”组合的学生有 240 人, 且选“物理、生物、政治”组合的人数是选“物理、化学、地理”组合的 $\frac{1}{3}$, 那么样本中选“物理、化学、生物”组合的学生比选“物理、生物、政治”组合的学生多 ()

A. 4 人 B. 5 人 C. 6 人 D. 7 人

解: 设选“物理、化学、地理”组合的人数为 x ,

则选“物理、生物、政治”组合的人数是 $\frac{1}{3}x$,

根据题意得 $x + \frac{1}{3}x = 360$,



解得： $x=270$ ， $\therefore \frac{x}{3}=90$ ，

选择“物理、化学、生物”、“物理、化学、地理”、“物理、生物、政治”

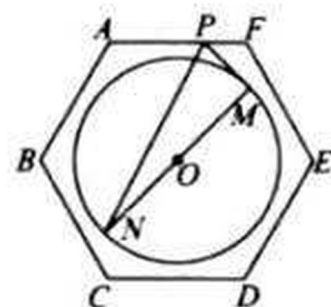
三种组合人数比是 $240:270:90=8:9:3$ ，

$\therefore$ 采用分层抽样的方法选取 20 名学生作为样本，三种组合分别抽取人数为：8，9，3，

$\therefore$ 样本中选“物理、化学、生物”组合的学生比选“物理、生物、政治”组合的学生多 $8-3=5$ （人）。

故选：B。

4. 如图正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 4，圆 O 的圆心为正六边形的中心，半径为 3。若点 P 在正六边形的边上运动， MN 为圆 O 的直径，则 $\vec{PM} \cdot \vec{PN}$ 的取值范围是（ ）



- A. $[3, 7]$ B. $[6, 10]$ C. $[8, 12]$ D. $[12, 16]$

解：由正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 4，圆 O 的圆心为正六边形的中心，半径为 3，

得正六边形 $ABCDEF$ 的内切圆半径为 $r = OA \sin 60^\circ = 4 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ ，外接圆半径 $R=4$ ，

$$\text{而 } \vec{PM} \cdot \vec{PN} = (\vec{PO} + \vec{OM}) \cdot (\vec{PO} + \vec{ON})$$

$$= (\vec{PO} + \vec{OM}) \cdot (\vec{PO} - \vec{OM}) = |\vec{PO}|^2 - |\vec{OM}|^2$$

$$= |\vec{PO}|^2 - 9.$$

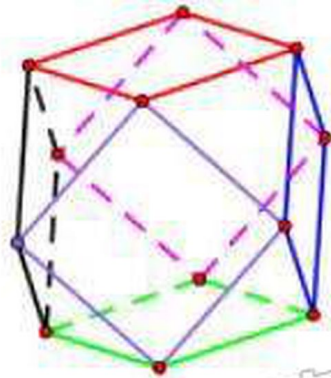
$$\because 2\sqrt{3} \leq |\vec{PO}| \leq 4, \therefore 12 \leq |\vec{PO}|^2 \leq 16.$$

则 $\vec{PM} \cdot \vec{PN}$ 的取值范围是 $[3, 7]$ 。

故选：A。

5. 由 6 个正方形和 8 个等边三角形围成的多面体如图所示，已知如图中正方形的边长与等边三角形的边长都为 $2\sqrt{2}$ ，则该几何体的体积为（ ）



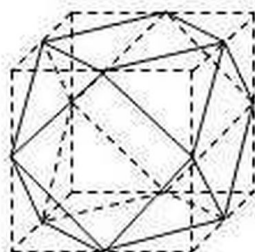


- A. 32 B. $32\sqrt{2}$ C. $\frac{160}{3}$ D. 64

解：如图所示，该几何体是由棱长为4的正方体沿各棱中点截去8个三棱锥所得到的，

$$\text{该几何体的体积 } V = 4 \times 4 \times 4 - 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{160}{3}.$$

故选：C.



6. 已知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ($x \in \mathbb{R}$)，下面结论错误的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π
 B. 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数
 C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称
 D. 函数 $f(x)$ 是偶函数

解：对于函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$)，

它的最小正周期为 2π ，故 A 正确；

显然，函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是减函数，故 B 错误；

由于 $f(x)$ 为偶函数，故它的图象关于直线 $x=0$ 对称，故 C、D 正确。

故选：B.

7. 设 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点，若椭圆上存在一点 P，使 $(\vec{OP} + \vec{OF_2}) \cdot \vec{PF_2} = 0$ (O 为坐标原点)，且 $2|\vec{PF_1}| = 3|\vec{PF_2}|$ ，则椭圆的离心率为 ()



A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{\sqrt{13}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{13}}{25}$

D. $\frac{4}{7}$

解：设 PF_2 的中点为 Q ，由 $(\vec{OP} + \vec{OF}_2) \cdot \vec{PF}_2 = 0$ 可得 $OQ \perp PF_2$ ，

连接 PF_1 可得 $OQ \parallel PF_1$ ，所以 $PF_1 \perp PF_2$ ，

可得 $|PF_2| = 2a - |PF_1|$ ，

又因为 $2|\vec{PF}_1| = 3|\vec{PF}_2|$ ，

所以 $|PF_2| = \frac{4}{5}a$ ， $|PF_1| = \frac{6a}{5}$ ，

在 $Rt\triangle PF_1F_2$ 中， $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ ，

即 $\frac{36a^2}{25} + \frac{16a^2}{25} = 4c^2$ ，可得： $13a^2 = 25c^2$ ，

解得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{5}$ ，

故选：B.

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x \leq 1 \\ |x-2| - 1, & x > 1 \end{cases}$ ，若函数 $y=f(x)$ 的图象与 $g(x) = \log_a x$ ($a > 1$)

的图象有 3 个交点，则 a 的取值范围是 ()

A. $(1, +\infty)$

B. $(1, e^2)$

C. $(\sqrt{e}, +\infty)$

D. $(1, \sqrt{e})$

解：如图，

当 $x > 1$ 时， $f(x)$ 图像与 $g(x)$ 图像必有 1 个交点，

因为 $g'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ ，所以 $g'(1) = \frac{1}{\ln a}$ ，

即曲线 $y=g(x)$ 在 $(1, 0)$ 处的切线的斜率为 $\frac{1}{\ln a}$ ，

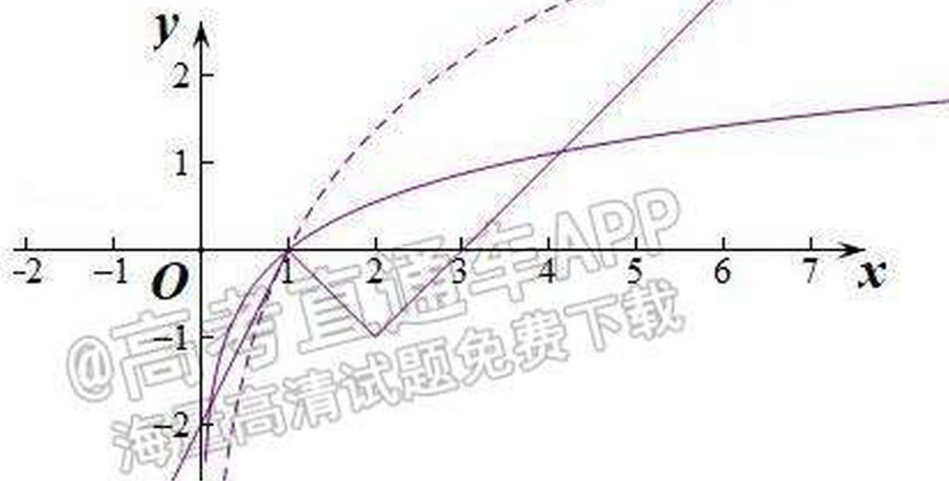
当 $x \leq 1$ 时， $f(x)$ 图像与 $g(x)$ 图像必须要有 2 个交点，

则要求 $2 > \frac{1}{\ln a}$ ，解得 $a > \sqrt{e}$ ，

综上 a 的取值范围为 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 。

故选：C.





二. 多选题 (共 4 小题)

9. 设正实数 a, b 满足 $a+b=1$, 则 ()

A. $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 9$

B. $2^a + 2^b > 3$

C. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$

D. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{1}{2}$

解: $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = (a+b)(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}) = 5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 9$ (当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 即

$b=2a$ 时等号成立),

所以 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 9$, 故选项 A 正确, $2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^a \cdot 2^b} = 2\sqrt{2^{a+b}} = 2\sqrt{2}$ (当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立),

由于 $2\sqrt{2} < 3$, 所以选项 B 错误;

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \leq \sqrt{2+2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立, 所以 C 正

确;

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1 - 2ab \geq 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立, D

正确.

故选: ACD.

10. 已知函数 $f(x) = \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$, 则下列选项正确的有 ()

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 曲线 $y=f(x)$ 关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 中心对称



C. $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$

D. 曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

解: $\because$ 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$,

由于 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$, 故 A 正确;

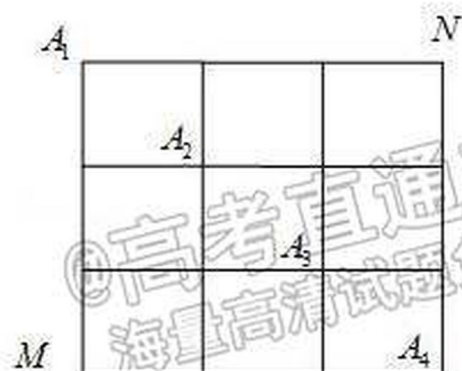
由于 $f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$, 故 B 错误;

由于 $f(x)_{\max}=\sqrt{3}$, 故 C 正确;

由于 $f(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$ 为函数最值, 故 D 正确,

故选: ACD.

11. 如图, 在某城市中, M 、 N 两地之间有整齐的方格形道路网, 其中 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 是道路网中位于一条对角线上的 4 个交汇点, 今在道路网 M 、 N 处的甲、乙两人分别要到 N 、 M 处, 他们分别随机选择一条沿街的最短路径, 以相同的速度同时出发, 直到到达 N 、 M 处为止, 则下列说法正确的是 ()



A. 甲从 M 必须经过 A_2 到达 N 处的方法有 9 种

B. 甲乙两人在 A_2 处相遇的概率为 $\frac{81}{100}$

C. 甲、乙两人相遇的概率为 $\frac{41}{100}$

D. 甲从 M 处到达 N 处的方法有 120 种

解: 对于 A, 甲经过 A_3 到达 N , 可分为两步:

第一步: 甲从 M 经过 A_3 的方法数: C_3^1 种,

第二步: 甲从 A_3 到 N 的方法数: C_2^1 种,

所以: 甲经过 A_3 的方法数为 $C_3^1 C_2^1 = 6$ 种, 故 A 正确;

对于 B, 由 AB 知: 甲从 M 到达 N 处的方法有 $C_6^3 = 20$ 种, 甲经过 A_2 的方法数为 $C_3^1 C_3^1 = 9$ 种,



同理, 乙从 M 到达 N 处的方法有 $C_6^3=20$ 种, 乙经过 A_2 的方法数也为: $C_3^1 C_3^1=9$ 种,

∴ 甲、乙两人相遇经 A_2 点的方法数为: $9 \times 9=81$ 种,

∴ 甲、乙两人相遇经 A_2 点的概率 $P=\frac{81}{20 \times 20}=\frac{81}{400}$, 故 B 错误;

对于 C , 甲、乙两人沿最短路径行走, 只可能在 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 处相遇,

他们在 A_i ($i=1, 2, 3, 4$) 相遇的走法有 $(C_3^{i-1})^4$ 种方法;

∴ $(C_3^0)^4 + (C_3^1)^4 + (C_3^2)^4 + (C_3^3)^4=164$,

∴ 甲、乙两人相遇的概率 $P=\frac{164}{400}=\frac{41}{100}$, 故 C 正确.

对于 D , 甲由道路网 M 处出发随机地选择一条沿街的最短路径到达 N 处需走 6 步,

共有 $C_6^3=20$ 种方法, 故 D 不正确.

故选: AC .

12. 已知抛物线 $x^2=8y$ 的焦点为 F , P 为抛物线上一点, 直线 l 交抛物线于 A, B 两点,

点 $M(2, 4)$, 则下列说法正确的是 ()

A. 存在直线 l , 使得 A, B 两点关于 $x+y-2=0$ 对称

B. $|PM|+|PF|$ 的最小值为 6

C. 当直线 l 过焦点 F 时, 以 AF 为直径的圆与 x 轴相切

D. 若分别以 A, B 为切点的抛物线的两条切线的交点在准线上, 则 A, B 两点的纵坐标之和的最小值为 4

解: 由于抛物线 $x^2=8y$ 的焦点 $F(0, 2)$,

对于 A , 假设存在直线 l , 使得 A, B 两点关于直线 $x+y-2=0$ 对称,

则设直线 l 的方程为 $x-y+m=0$,

联立 $\begin{cases} x^2=8y \\ x-y+m=0 \end{cases}$,

所以 $x^2-8x-8m=0$,

所以 $\Delta=(-8)^2-4 \times 1 \times (-8m)=64+32m>0$, 即 $m>-2$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 线段 AB 的中点为 Q ,

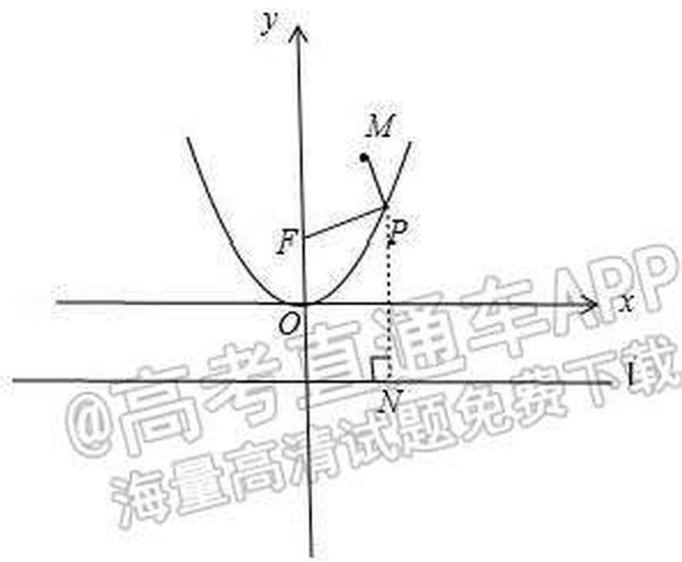
所以 $x_1+x_2=8$,

所以 $x_Q=\frac{x_1+x_2}{2}=4, y_Q=x_Q+m=4+m$,

点 Q 在直线 $x+y-2=0$ 上,

所以 $4+4+m-2=0$, 解得 $m=-6$, 与 $m>-2$ 矛盾, 故 A 不正确;

对于 B: 设 l' 为抛物线的准线, 则准线 l' 的方程为 $y = -2$. 过点 P 作 $PN \perp l'$ 于点 N .



则 $|PM| + |PF| = |PM| + |PN| \geq 6$, 当且仅当 P, M, N 三点共线时等号成立.

所以 $|PM| + |PF|$ 的最小值为 6, 故 B 正确;

对于 C: 当直线 l 过焦点时, 设 $A(x_1, y_1)$,

则以 AF 为直径的圆心为 AF 的中点, $(\frac{x_1}{2}, \frac{2+y_1}{2})$,

所以圆心到 x 轴的距离为 $d = \frac{2+y_1}{2}$,

由抛物线的定义可得 $|AF|$ 为点 A 到准线的距离, 即 $|AF| = y_1 + 2$,

所以 $d = \frac{|AF|}{2}$,

所以当直线 l 过焦点 F 时, 以 AF 为直径的圆与 x 轴相切, 故 C 正确;

对于 D: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由 $x^2 = 8y$, 即 $y = \frac{x^2}{8}$,

所以 $y' = \frac{x}{4}$,

则切线 AT 的方程为 $y - y_1 = \frac{x_1}{4}(x - x_1)$, 即 $y = \frac{x_1}{4}x - \frac{x_1^2}{8}$,

同理切线 BT 的方程为 $y = \frac{x_2}{4}x - \frac{x_2^2}{8}$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{x_1}{4}x - \frac{x_1^2}{8} \\ y = \frac{x_2}{4}x - \frac{x_2^2}{8} \end{cases}$$

解得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{x_1 x_2}{8}$.

由题意, 点 T 在准线 $y = -2$ 上,

则 $\frac{x_1 x_2}{8} = -2$,



所以 $x_1x_2 = -16$,

$$\text{所以 } y_1+y_2 = \frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2) = \frac{1}{8}[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2] = \frac{1}{8}(x_1+x_2)^2 - \frac{x_1x_2}{4} = \frac{1}{8}(x_1+x_2)^2 + 4,$$

所以当 $x_1+x_2=0$ 时, y_1+y_2 取得最小值 4, 故 D 正确;

故选: BCD.

三. 填空题 (共 4 小题)

13. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2=2a_1+2$, $a_5=4a_3$, 则数列 $\{a_n\}$ 中不超过 2021 的所有项的和为 2046.

解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q>0$),

$$\text{根据题意得 } \begin{cases} a_1(1+q) = 2a_1 + 2 \\ a_1q^4 = 4a_1q^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases},$$

所以 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$. 令 $a_n \leq 2021$, 得 $2^n \leq 2021$, 解得 $n \leq 10$.

$$\text{所以 } \{a_n\} \text{ 的前 10 项和为 } S_{10} = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2048 - 2 = 2046.$$

则数列 $\{a_n\}$ 中不超过 2021 的所有项的和为 2046.

故答案为: 2046.

14. 请写出与函数 $f(x) = e^{2x} - 1$ 的图象在点 $(0, 0)$ 处具有相同切线的一个函数 $g(x)$

$$= \underline{x^2+2x} \text{ (答案不唯一)}$$

$$\text{解: } \because f(x) = e^{2x} - 1,$$

$$\therefore f'(x)|_{x=0} = (2e^{2x})|_{x=0} = 2,$$

$$\therefore f(x) = e^{2x} - 1 \text{ 的图象在点 } (0, 0) \text{ 处的切线方程为: } y - 0 = 2(x - 0), \text{ 即 } y = 2x;$$

若 $g(x) = x^2+2x$, 则 $g(0) = 0$, 即 $g(x)$ 过点 $(0, 0)$,

$$\text{又 } g'(x)|_{x=0} = (2x+2)|_{x=0} = 2,$$

$$\therefore g(x) = x^2+2x \text{ 的图象在点 } (0, 0) \text{ 处的切线方程为 } y = 2x;$$

即 $f(x) = e^{2x} - 1$ 的图象与 $g(x) = x^2+2x$ 的图象在点 $(0, 0)$ 处的切线方程相同,

故答案为: x^2+2x (答案不唯一).

15. 点 P 是直线 $y=kx-4$ 上一动点, 过点 P 作圆 $C: x^2+y^2-2y=0$ 的两条切线 PA, PB , 其中 A, B 为切点, 若四边形 $PACB$ 面积的最小值为 2, 则实数 k 的值为 ± 2 .

解: 圆 $C: x^2+y^2-2y=0$ 的圆心 $(0, 1)$, 半径是 $r=1$,

由圆的性质知: $S_{\text{四边形 } PACB} = 2S_{\triangle PBC}$, 四边形 $PACB$ 的最小面积是 2,

$$\therefore S_{\triangle PBC} \text{ 的最小值 } S = 1 = \frac{1}{2}rd \text{ (} d \text{ 是切线长)}$$

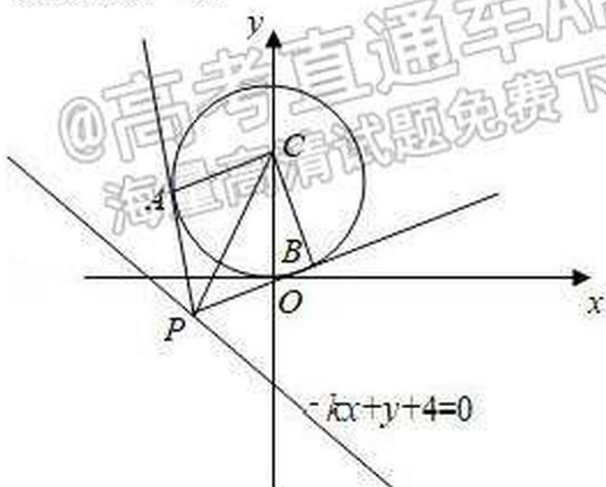
$\therefore d_{\min}=2$.

圆心到直线的距离就是 PC 的最小值.

$$\text{所以: } \sqrt{1^2+2^2} = \frac{5}{\sqrt{1+k^2}},$$

解得: $k=\pm 2$.

故答案为: ± 2 .



16. 若 $(x+2)^{2022} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2022}x^{2022}$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}$ 被 4 除得的余数为 1.

解: $\because (x+2)^{2022} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2022}x^{2022}$,

令 $x=1$, 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = 3^{2022}$, 令 $x=-1$, 可得 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2022} = 1$,

两式相加除以 2, 可得 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022} = \frac{3^{2022} + 1}{2} = \frac{9^{1011} + 1}{2} = \frac{(8+1)^{1011} + 1}{2}$

$$= \frac{C_{1011}^0 \cdot 8^{1011} + C_{1011}^1 \cdot 8^{1010} + \dots + C_{1011}^{1011} \cdot 8 + 1 + 1}{2}.$$

分子中, 除了最后 2 项外, 其余各项都能被 8 整除,

故 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}$ 除以 4 的余数, 即 $\frac{1+1}{2}$ 除以 4 的余数, 为 1.

故答案为: 1.

四. 解答题 (共 6 小题)

17. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, 且 $\sqrt{3}a \sin C = c \cos A + c$.

(1) 求 A ;

(2) 在 ① $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, ② $\triangle ABC$ 的周长为 $6+2\sqrt{3}$, ③ $\frac{c-1}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 B 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 已知 $b=2$, .



解: (1) 因为 $\sqrt{3}a\sin C = c\cos A + c$, 利用正弦定理可得 $\sqrt{3}\sin A\sin C = \sin C\cos A + \sin C$,

因为 $\sin C \neq 0$, 可得 $\sqrt{3}\sin A = \cos A + 1$,

$$\text{所以 } \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

因为 $A \in (0, \pi)$, $A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,

$$\text{所以 } A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \text{ 可得 } A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 若选①, 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$,

$$\text{则 } \frac{1}{2} \times 2 \times c \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}c = \sqrt{3}, \text{ 得 } c = 2,$$

$$\text{则 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \frac{\pi}{3} = 4, \text{ 得 } a = 2,$$

则三角形为等边三角形, 故 $B = \frac{\pi}{3}$;

若选②, $\triangle ABC$ 的周长为 $6 + 2\sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{3}$, $b = 2$,

$$\text{可得 } a + c = 4 + 2\sqrt{3},$$

$$\text{由余弦定理得 } a^2 = 4 + c^2 - 2 \times 2c\cos \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } a^2 = 4 + (4 + 2\sqrt{3} - a)^2 - 2 \times (4 + 2\sqrt{3} - a),$$

$$\text{解得 } a = 2\sqrt{3},$$

$$\text{由 } \frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sin B}, \text{ 得 } \sin B = \frac{1}{2},$$

$$\text{由 } a > b, \text{ 可得 } B = \frac{\pi}{6};$$

$$\text{若选③, } \frac{c-1}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 则 } c-1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{a^2+c^2-4}{2ac},$$

$$\text{又由余弦定理得, } a^2 = 4 + c^2 - 2c, \text{ 代入上式得 } c-1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{c^2-c}{ac} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{c+1}{a},$$

$$\text{得 } c-1=0 \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{2a}=1, \text{ 即 } a = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

若 $c=1$, 则 $B=90^\circ$ (舍), 若 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 由 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{a} = 2$, 可知三角形不存在, 因此满足

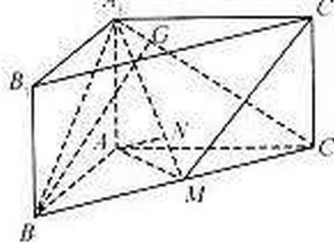
③的三角形不存在.

18. 如图, 在侧棱垂直于底面的三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}BC$, M 是线段 BC 的中点, N 是线段 A_1M 靠近点 M 的四等分点, 点 G 在线段 A_1C 上.

(1) 求证: $AN \perp BG$;

(2) 求二面角 $B - A_1M - C_1$ 的正弦值.





解：(1) 证明：不妨设 $AB=2$ ，则 $AC=2$ ， $AA_1=\sqrt{3}$ ， $BC=2\sqrt{3}$ ， $AM=1$ 。

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面，

所以 $AA_1 \perp AM$ 。

在直角三角形 A_1AM 中， $AA_1=\sqrt{3}$ ， $AM=1$ ，

所以 $A_1M=2$ 。

又 N 为线段 A_1M 靠近点 M 的四等分点，

所以 $MN=\frac{1}{2}$ 。

又分析知 $\angle AMN=60^\circ$ ，所以 $AN^2=1^2+(\frac{1}{2})^2-2 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \cos 60^\circ=\frac{3}{4}$ ，

所以 $AN^2+MN^2=AM^2$ ，所以 $\angle ANM=90^\circ$ ，即 $A_1M \perp AN$ 。

因为 M 为 BC 中点， $AB=AC$ ，所以 $AM \perp BC$ 。

又 $AA_1 \perp BC$ ， $AA_1 \cap AM=A$ ， $AM \subset$ 平面 A_1AM ， $AA_1 \subset$ 平面 A_1AM ，

所以 $BC \perp$ 平面 A_1AM 。又 $AN \subset$ 平面 A_1AM ，所以 $BC \perp AN$ 。

又 $A_1M \perp AN$ ， $BC \cap A_1M=M$ ， $BC \subset$ 平面 A_1BC ， $A_1M \subset$ 平面 A_1BC ，

所以 $AN \perp$ 平面 A_1BC 。又 $BG \subset$ 平面 A_1BC 。

所以 $AN \perp BG$ 。

(2) 据题设知， AM ， BC ， AA_1 两两相互垂直，以点 M 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，设 $AB=2$ ，

所以 $B(-\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $A_1(0, 1, \sqrt{3})$ ， $M(0, 0, 0)$ ， $C_1(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ 。

所以 $\vec{MB}=(-\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $\vec{MA_1}=(0, 1, \sqrt{3})$ ， $\vec{MC_1}=(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ 。

设平面 BA_1M 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1, y_1, z_1)$ ，则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{MB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{MA_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}x_1 = 0 \\ y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } z_1=1, \text{ 得 } \vec{m}=(0, -\sqrt{3}, 1).$$

设平面 C_1A_1M 的一个法向量 $\vec{n}=(x_2, y_2, z_2)$ ，则



$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{MC}_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{MA}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \\ y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } z_2 = 1, \text{得 } \vec{n} = (-1, -\sqrt{3}, 1).$$

$$\text{所以 } \cos(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{0 \times (-1) + (-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) + 1 \times 1}{\sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 1^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

所以二面角 $B - A_1M - C_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

19. 已知无穷数列 $\{a_n\}$, 对于任意给定的正整数 t , 设不等式 $a_n - a_t \geq t^*(n - t)$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立时 t^* 的取值集合为 $T(t)$.

(1) $a_n = n^2$, 求集合 $T(2)$;

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d , 求 $T(t)$;

(3) 若对任意 $t \geq 2, t \in \mathbb{N}^*$, $T(t)$ 均为相同的单元素集合, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

解: (1) 因为 $a_n = n^2$, $T(2)$ 为满足不等式 $a_n - a_t \geq t^*(n - t) (n \in \mathbb{N}^*)$ 的 t^* 构成的集合, 所以有: $n^2 - 4 \geq t^*(n - 2)$, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立

当 $n > 2$ 时, 上式可化为 $n + 2 \geq t^*$,

所以 $5 \geq t^*$.

当 $n = 1$ 时, 上式可化为 $3 \leq t^*$.

所以 $T(2)$ 为 $[3, 5]$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d , 所以 $a_n - a_t = (n - t)d \geq t^*(n - t)$

当 $n > t$ 时, $t^* \leq d$

当 $n < t$ 时, $t^* \geq d$

所以 $t^* = d$, 所以 $T(t) = \{d\}$

(3) 对于数列 $\{a_n\}$, 若对任意 $t \geq 2, t \in \mathbb{N}^*$, $T(t)$ 中均只有同一个元素, 不妨设为 a .

下面证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

当 $n = t + 1$ 时, $a_{t+1} - a_t \geq a$ 对任意 $t \geq 2$ 恒成立;

当 $n = t - 1$ 时, 有 $a_t - a_{t-1} \leq a$ 对任意 $t \geq 2$ 恒成立, 所以 $a_{t+1} - a_t \leq a$ 对任意 $t \geq 2$ 恒成立;

所以 $a_{t+1} - a_t = a$ 对任意 $t \geq 2$ 恒成立

所以数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 为等差数列.

20. 已知双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1, F_2 为双曲线的左、右焦点, 离心率为 2, 点 P 为双

曲线在第一象限上的一点, 且满足 $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = 0, |\vec{PF}_1| |\vec{PF}_2| = 6$.

(1) 求双曲线的标准方程;

(2) 过点 F_2 作直线 l 交双曲线于 A, B 两点, 则在 x 轴上是否存在定点 $Q(m, 0)$ 使

得 $\vec{QA} \cdot \vec{QB}$ 为定值, 若存在, 请求出 m 的值和该定值, 若不存在, 请说明理由.

解: (1) 由题意可得 $e = \frac{c}{a} = 2$, 可得 $c = 2a$, $b^2 = c^2 - a^2 = 3a^2$,

所以 $b = \sqrt{3}a$,

又因为 $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = 0$, $|\vec{PF}_1| |\vec{PF}_2| = 6$.

在 $Rt\triangle PF_1F_2$ 中, 由 $|\vec{PF}_1| |\vec{PF}_2| = 6$.

由 $|\vec{PF}_1| - |\vec{PF}_2| = 2a$, 所以可得 $|\vec{PF}_1|^2 + |\vec{PF}_2|^2 - 2|\vec{PF}_1| |\vec{PF}_2| = 4a^2$,

而 $|\vec{PF}_1|^2 + |\vec{PF}_2|^2 = 4c^2$,

所以 $4c^2 - 12 = 4a^2$,

可得 $b^2 = 3$, $a^2 = 1$,

所以双曲线的方程为: $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 由 (1) 可得 $F_2(2, 0)$,

当直线 l 的斜率为 0 时, $l: y = 0$, 此时 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$,

由 $M(m, 0)$, 则 $\vec{QA} \cdot \vec{QB} = m^2 - 1$,

当 l 的斜率不为 0 时, 设 $l: x = ty + 2$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} x = ty + 2 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$, 整理可得: $(3t^2 - 1)y^2 + 12ty + 9 = 0$,

因为 $t^2 \neq \frac{1}{3}$, $y_1 + y_2 = \frac{-12t}{3t^2 - 1}$, $y_1 y_2 = \frac{9}{3t^2 - 1}$,

因为 $\vec{QA} \cdot \vec{QB} = (x_1 - m, y_1) \cdot (x_2 - m, y_2) = (ty_1 + 2 - m)(ty_2 + 2 - m) + y_1 y_2 = (t^2 + 1)y_1 y_2 + (2 - m)t(y_1 + y_2) + (2 - m)^2$

$= (t^2 + 1) \cdot \frac{9}{3t^2 - 1} + (2 - m)t \cdot \frac{-12t}{3t^2 - 1} + (2 - m)^2$

$= \frac{(12m - 15)t^2 + 9}{3t^2 - 1} + (2 - m)^2$

$= \frac{(12m - 15)t^2 + 9}{3t^2 - 1} + (2 - m)^2$,

要使 $\vec{QA} \cdot \vec{QB}$ 为定值, 则 $\frac{12m - 15}{3} = \frac{9}{-1}$, 解得 $m = -1$,

所以 $Q(-1, 0)$.

21. 为纪念中国共产党成立 100 周年, 加深青少年对党的历史、党的知识、党的理论和路线方针的认识, 激发爱党爱国热情, 坚定走新时代中国特色社会主义道路的信心, 某校举办了党史知识竞赛, 竞赛规则是: 两人一组, 每一轮竞赛中, 小组两人分别答 3 道题,



若答对题目不少于 5 道题，则获得一个积分。已知甲乙两名同学一组，甲同学和乙同学

对每道题答对的概率分别是 p_1 和 p_2 ，且每道题答对与否互不影响。

(1) 若 $p_1 = \frac{4}{5}$ ， $p_2 = \frac{3}{4}$ ，求甲乙同学这一组在一轮竞赛中获得一个积分的概率；

(2) 若 $p_1 + p_2 = \frac{4}{3}$ ，且每轮比赛互不影响，若甲乙同学这一组想至少获得 5 个积分，那么理论上至少要进行多少轮竞赛？

解：(1) 假设同学甲和同学乙答对的题目个数分别为 a_1, a_2 ，

所以所求概率为 $P = P(a_1=2, a_2=3) + P(a_1=3, a_2=2) + P(a_1=3, a_2=3)$

$$= C_3^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times C_3^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{297}{500},$$

所以他们在第一轮竞赛中获得一个积分的概率为 $\frac{297}{500}$ 。

(2) 由 (1) 可知， $P = P(a_1=2, a_2=3) + P(a_1=3, a_2=2) + P(a_1=3, a_2=3)$

$$= C_3^2 \times p_1^2 \times (1-p_1) \times p_2^3 + p_1^3 \times C_3^2 \times p_2^2 \times (1-p_2) + p_1^3 \times p_2^3,$$

整理可得 $P = p_1^2 p_2^2 [3(p_1 + p_2) - 5p_1 p_2] = p_1^2 p_2^2 (4 - 5p_1 p_2)$ ，

因为 $0 \leq p_1 \leq 1$ ， $0 \leq p_2 \leq 1$ ，且 $p_1 + p_2 = \frac{4}{3}$ ，

所以 $\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 1$ ， $\frac{1}{3} \leq p_2 \leq 1$ ，

故 $\frac{1}{9} \leq p_1 p_2 \leq \left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ，

当且仅当 $p_1 = p_2 = \frac{2}{3}$ 时取等号，

则 $\frac{1}{9} \leq p_1 p_2 \leq \frac{4}{9}$ ，

令 $t = p_1 p_2$ ，则 $t \in [\frac{1}{9}, \frac{4}{9}]$ ，

所以 $P(t) = -5t^3 + 4t^2$ ， $t \in [\frac{1}{9}, \frac{4}{9}]$ ，

则 $P'(t) = -15t^2 + 8t$ ，

当 $t \in [\frac{1}{9}, \frac{4}{9}]$ 时， $P'(t) > 0$ 恒成立，

所以当 $t = \frac{4}{9}$ 时， $P(t)$ 取得最大值 $\frac{256}{729}$ 。

甲乙两同学在 n 轮比赛中获得的积分 $X \sim B(n, P)$ ，

则由 $nP \geq 5$ ，即 $n \cdot \frac{256}{729} \geq 5$ ，解得 $n \geq 5 \times \frac{729}{256} \approx 14.2$ ，

因为 n 为正整数，所以 n 至少为 15。

故至甲乙同学这一组想至少获得 5 个积分，理论上少要进行 15 轮竞赛.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 - x + 1)$.

(1) 若 $a = -2$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求证: 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 只有一个零点.

解: (1) 当 $a = -2$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2(x^2 - x + 1)$, 则 $f'(x) = x^2 + 4x - 2$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < -2 - \sqrt{6}$ 或 $x > -2 + \sqrt{6}$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $-2 - \sqrt{6} < x < -2 + \sqrt{6}$,

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -2 - \sqrt{6})$, $(-2 + \sqrt{6}, +\infty)$, 单调减区间为 $(-2 - \sqrt{6}, -2 + \sqrt{6})$;

(2) 证明: 令 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 - x + 1) = 0$, 则 $\frac{x^3}{x^2 - x + 1} - 3a = 0$,

设 $k(x) = \frac{x^3}{x^2 - x + 1} - 3a$, 则 $k'(x) = \frac{x^2(x^2 - 2x + 3)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{x^2[(x-1)^2 + 2]}{(x^2 - x + 1)^2} \geq 0$,

$\therefore k(x)$ 单调递增,

$\therefore k(x)$ 至多有一个零点,

又 $f(3a+1) = 6a^2 + 2a + \frac{1}{3} > 0$, $f(3a-1) = -\frac{1}{3} < 0$,

$\therefore$ 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 只有一个零点