

“皖南八校”2021 届高三第三次联考

数 学 (理科)

18 所理事学校 新考文化

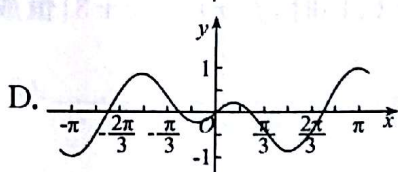
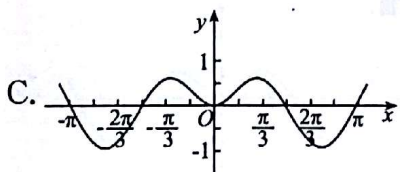
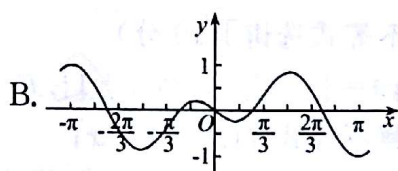
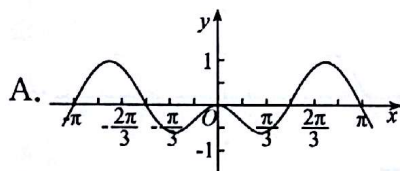
2021.4

考生注意:

1. 本试卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时, 请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 做选考题时, 考生须按照题目要求作答, 并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑。

一、选择题: 本题共 12 小题; 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x | y = \log_2(x+1)\}$, $B = \{y | y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$, 且 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$
A. $\emptyset$ B. $\{-1\}$ C. $(-1, 1]$ D. $[-1, 1]$
2. 若复数 $z_1 = 2+i$, $z_2 = 1-2i$, $z = z_1 \cdot z_2$, 则 $|z \cdot \bar{z}| =$
A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. 15 D. 25
3. “有两个面平行, 其余各面都是平行四边形”是“几何体为棱柱”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要
4. 已知 a, b 为不共线的两个单位向量, 且 $|a-b|=1$, 则 $a \cdot (a+2b) =$
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
5. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 若点 $A(x_0, 2\sqrt{3})$ 在抛物线上, 则 $|AF| =$
A. 3 B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $2\sqrt{3}+1$
6. 函数 $f(x) = \frac{2^{x+1}-2}{2^x+1} \cos(x+\frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4}-x)$ 的图像为



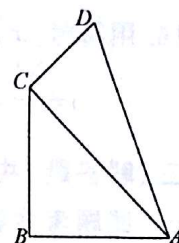
7. 已知直线 $l: x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 6$ 交于 A, B 两点.

下列说法: ①线段 AB 的长度为定值; ②圆 O 上总有 4 个点到 l 的距离为 $\sqrt{2}$;

③线段 AB 的中点轨迹方程为: $x^2 + y^2 = 1$. 其中正确的个数是

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 如图, 四边形 $ABCD$ 中 $AB=BC=1$, $\angle ABC=\angle ACD=\frac{\pi}{2}$, 且 $\triangle ABC, \triangle ACD$ 的周长相等, 则 $\sin 2\angle BAD=$

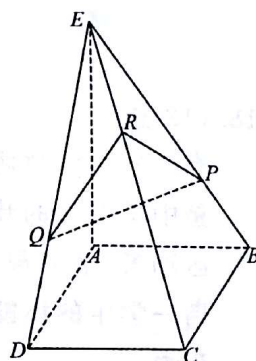


- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 平面直角坐标系 xOy 上有一个以 $(0,0), (4,0), (0,4), (4,4)$ 为顶点的正方形. 在正方形内随机取一点, 该点位于以格点(横、纵坐标均为整数的点)为圆心, r 为半径的圆内的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 r 的值为

- A. $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ B. $\frac{\sqrt{3\pi}}{3\pi}$ C. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$ D. $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$

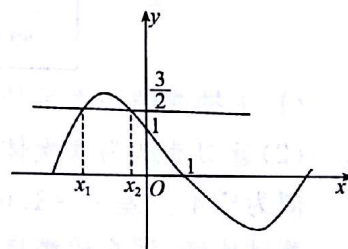
10. 如图, 已知四棱锥 $E-ABCD$, 底面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, $AE \perp$ 面 $ABCD$, $\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{EP}=2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{ER}=\frac{1}{2}\overrightarrow{RC}$, 若 $RP=RQ=\sqrt{6}$, 则四棱锥 $E-ABCD$ 外接球表面积为



- A. 44π B. 54π
C. 176π D. 216π

11. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0, \frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$) 的一个周期的图象如图所示, 其中 $f(0)=1, f(1)=0, f(x_1)=f(x_2)=\frac{3}{2}$, 则 $f(x_1+x_2)$ 等于

- A. 2
B. 0
C. 1
D. $-\frac{1}{2}$



12. 已知双曲线 $C_1: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 椭圆 $C_2: x^2 + \frac{y^2}{4} = m$ ($m>0$) 上一点 P

(P 不在 C_1 的渐近线上), 过点 P 分别作平行于双曲线两条渐近线的直线, 分别交渐近线于 E, F 两点, 且 $|PE|^2 + |PF|^2 = 5$, 则 $m=$

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 4 D. 8

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , a_1, a_2, a_4 成等比数列, 且 $S_3=6$, 则 $a_5=$ _____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , D 为边 BC 上一点, 且 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线, 若 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}, AD = \sqrt{3}$, 则 $b+c$ 最小值为_____.

15. 17 世纪至 18 世纪的德国数学家莱布尼茨, 是世界上第一个提出二进制记数法的人. 用二进制记数, 只用 0 和 1 两个符号, 无需其他符号. 以 0 开头, 以 0 结尾, 不包含两个连续的 0, 也不包含三个连续的 1, 且长度为 9 的只含 0 或 1 的序列共有_____个.

16. 用符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,例如: $[-1.2]=-2, [0.6]=0, [2]=2$. 已知函数

$f(x)=x^3 \ln x$, 当 $f(x)$ 的值域为 $(2e^6, +\infty)$ 时, $[\log_{\sqrt{x}} f(x)]$ 的值为_____.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1=1, a_{n+1}+S_n \cdot S_{n+1}=0$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项为 $b_n=2^{\frac{n}{2}+1}$.

(1)求证: $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是等差数列;

(2)设 $c_n=\frac{b_n^2}{S_n}$, 求 $\{c_n\}$ 前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

十三届全国政协、人大四次会议分别于 2021 年 3 月 4 日、3 月 5 日在北京召开. 其中有一位是中学校长的政协委员谈到现在学生发育好, 但体能差, 他认为好的教育应该注重培养终身运动者, 他的观点引起社会较大关注. 某地区对高一学生进行体能测试, 随机抽取了 100 名高一学生的体能测试成绩(单位:分, 满分 10 分), 把所得数据列成了如下表所示的频数分布表:

组别	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)	[8,9)	[9,10]
频数	5	18	28	26	17	6

(1)求抽取的样本平均数 $\bar{x}$ (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(2)近似地认为这次体能测试成绩服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ (其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$, σ^2 近似为样本方差 $s^2=1.61$). 若规定得分 8.27 为良好, 随机抽取 5 个这个地区的高一学生体能测试成绩, 那么成绩良好的期望是多少个?

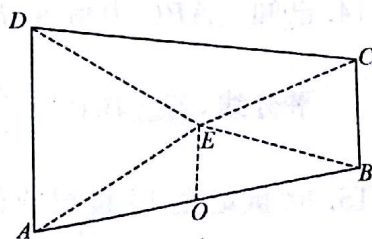
参考数据: $\sqrt{1.61} \approx 1.27$, 若 $z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < z < \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

19. (12 分)

如图, 四棱锥 $E-ABCD$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp$ 面 ABE , $AE=AD=BE=2BC$, $\angle AEB=\frac{2\pi}{3}$, O 为 AB 中点.

(1)证明: 面 $EOC \perp$ 面 $ABCD$;

(2)点 F 是点 E 关于面 $ABCD$ 对称的点, 求二面角 $O-CD-F$ 的余弦值.



20. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 过点 F 的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 当

直线 $l \perp x$ 轴时, $|AB| = \sqrt{2}$, $\tan \angle AOB = 2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 $l' \perp l$, 直线 l' 与直线 l, x 轴、 y 轴分别交于点 M, P, Q , 当点 M 为线段 AB 中点时, 求 $\frac{\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PF}}{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ}}$ 的取值范围.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{-\ln x}{x}$.

(1) 设 $g(x) = f(x) + f(\frac{x}{x-1})$, 求函数 $g(x)$ 的最小值;

(2) 设 $h(x) = f(\frac{1}{x})$, 对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $h(x_1) + h(x_2) \geq h(x_1 + x_2) + k(x_1 + x_2)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos \theta$, 且曲线 C_1 与极轴的交点为 M (异于极点); 曲线 C_2 的圆心为 $C_2(3, 0)$, 且过极点 O .

(1) 求点 M 的直角坐标及曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若射线 $l: \theta = \alpha (\rho > 0, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}))$ 与曲线 C_1, C_2 分别交于点 A, B , 当 $\angle ABM = \frac{\pi}{6}$ 时, 求 $\tan \alpha$.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x+1| + |2ax+1|$.

(1) 若 $a=1$, 解不等式 $f(x) > 3-x$;

(2) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) \leq |x+3|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

“皖南八校”2021 届高三第三次联考·数学(理科)

参考答案、解析及评分细则

1. B $A=(-1, +\infty)$, $B=[-1, 1]$, $\complement_{\mathbb{R}}A=(-\infty, -1]$, 可得 $(\complement_{\mathbb{R}}A) \cap B = \{-1\}$, 故选 B.
2. D $z=z_1 z_2=(2+i)(1-2i)=4-3i$, 故 $|z \cdot \bar{z}|=|z|^2=25$.
3. B 由棱柱定义可知棱柱有两个面平行, 其余各面都是平行四边形, 但有两个面平行, 其余各面都是平行四边形的几何体不一定是棱柱, 例如两个底面全等的斜棱柱拼接的几何体不是棱柱.
4. D 依题意 $|a-b|=1$, 则 a, b 夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 故 $a \cdot (a+2b)=a^2+2a \cdot b=2$.
5. C $A(x_0, 2\sqrt{3})$, 则 $12=4x_0 \Rightarrow x_0=3$, 故 $|AF|=x_0+1=4$.
6. D $f(x)=\frac{2^{x+1}-2}{2^x+1}\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}\cos 2x$, $f(x)+f(-x)=0$, 故 $f(x)$ 为奇函数,
由 $f(\pi)=\frac{2^\pi-1}{2^\pi+1}\cos 2\pi>0$, 故选 D.
7. D 圆心 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=1$, 则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{5}$ 为定值, 故①正确;
 $d < r-1=\sqrt{6}-1$, 故②正确;
线段 AB 的中点与圆心 O 距离恒等于 1, 故③正确.
8. C 依题意, $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$, $AC=\sqrt{2}$, 设 $CD=x$, 则 $AD=\sqrt{2+x^2}$, $\triangle ABC, \triangle ACD$ 的周长相等, 则 $x+\sqrt{2+x^2}=2$, 解得 $x=\frac{1}{2}$, 则 $AD=\frac{3}{2}$, 于是 $\sin\angle CAD=\frac{1}{3}$, $\cos\angle CAD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,
故 $\sin\angle BAD=\sin(\frac{\pi}{4}+\angle CAD)=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$; $\cos\angle BAD=\cos(\frac{\pi}{4}+\angle CAD)=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$;
 $\therefore \sin 2\angle BAD=2\sin\angle BAD \cdot \cos\angle BAD=\frac{7}{9}$.
9. C 在正方形内以格点(横纵坐标均为整数的点)为圆心, r 为半径的圆内部分的面积为 $16\pi r^2$, 故落在此区域的概率为 $P=\frac{16\pi r^2}{16}=\pi r^2=\frac{1}{2}$, 得 $r=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
10. B 以 A 为坐标原点, 以 AD, AB, AE 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 设 $AE=h$,
则 $A(0,0,0), B(0,3,0), C(3,3,0), D(3,0,0), E(0,0,h)$,
则 $P(0,2,\frac{h}{3}), Q(2,0,\frac{h}{3}), R(1,1,\frac{2h}{3})$,
于是 $|\overrightarrow{PR}|=|\overrightarrow{QR}|=\sqrt{2+\frac{h^2}{9}}$,
则 $\sqrt{2+\frac{h^2}{9}}=\sqrt{6}$, $\therefore h=6$, 四棱锥 $E-ABCD$ 外接球直径为 $|EC|=\sqrt{3^2+3^2+6^2}=\sqrt{54}$,
故其表面积为 $4\pi r^2=\pi|EC|^2=54\pi$.
11. C 由 $f(0)=1 \Rightarrow \sin \varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{5\pi}{6}$,
由 $f(1)=0 \Rightarrow \omega+\varphi=k\pi \Rightarrow \omega=k\pi-\frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$,
又因为周期 $T>4(1-0) \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega}>4 \Rightarrow 0<\omega<\frac{\pi}{2}$,
所以 $\omega=\frac{\pi}{6}, f(x)=2\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{5\pi}{6})$, 因此点 $(x_1, \frac{3}{2}), (x_2, \frac{3}{2})$,
关于直线 $x=-2$ 对称, $x_1+x_2=-4, f(x_1+x_2)=2\sin \frac{\pi}{6}=1$.

12. B 设 $P(x_0, y_0)$, 联立 $\begin{cases} y - y_0 = 2(x - x_0) \\ y = -2x \end{cases}$ 得 $x_E = \frac{2x_0 - y_0}{4}$,

联立 $\begin{cases} y - y_0 = -2(x - x_0) \\ y = 2x \end{cases}$ 得 $x_F = \frac{2x_0 + y_0}{4}$,

$$|PE|^2 + |PF|^2 = |OE|^2 + |OF|^2 = (\sqrt{1+2^2})^2 (x_E^2 + x_F^2) = 5 \left[\left(\frac{2x_0 - y_0}{4} \right)^2 + \left(\frac{2x_0 + y_0}{4} \right)^2 \right] = \frac{5(4x_0^2 + y_0^2)}{8},$$

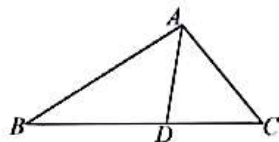
又 $4x_0^2 + y_0^2 = 4m$, 故 $m = 2$.

13. 2 或 5 $S_3 = 3a_2 = 6$, $\therefore a_2 = 2$, a_1, a_2, a_4 成等比数列, 则 $a_2^2 = (a_2 - d)(a_2 + 2d)$,

即 $2^2 = (2 - d)(2 + 2d)$, 解得 $d = 0$ 或 $d = 1$, 故 $a_5 = 2$ 或 5.

14. 4 如图, $\because AD$ 为角平分线,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC}, \therefore \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \angle DAC,$$



化简得 $b + c = bc$, $\therefore \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, 则 $b + c = (b + c) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 2 + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 4$,

当且仅当 $c = b$ 时取等号, 故 $b + c$ 最小值为 4.

15. 4 0 后面只能接 1 或 11, 记 01 为 A, 011 为 B, 原问题等价于将一些 A 和 B 排列在长度为 8 的序列上, 情形 (1): 4 个 A: 只有 1 种排列, 情形 (2): 2 个 B, 1 个 A, 共有 $C_3^2 = 3$ 种排列, 故共有 4 种排列.

16. 6 易知 $f(x)$ 在 $(0, e^{-\frac{1}{3}})$ 单调递减, 且 $f(x) < 0$; 在 $(e^{-\frac{1}{3}}, +\infty)$ 单调递增,

故 $f(x) > 2e^6$ 的解集应是单调递增区间 $(e^{-\frac{1}{3}}, +\infty)$ 的子集, 又 $f(e^2) = 2e^6$, 从而 $x > e^2$,

$$\text{令 } h(x) = \log_{\sqrt{x}} f(x) = \log_{\sqrt{x}} (x^3 \ln x) = 6 + \log_{\sqrt{x}} \ln x = 6 + \frac{\ln(\ln x)}{\ln \sqrt{x}} = 6 + \frac{2 \ln(\ln x)}{\ln x}.$$

$$\text{令 } s = \ln x, \text{ 则 } h(x) = m(s) = 6 + \frac{2 \ln s}{s} (s > 2), \text{ 所以 } m'(s) = \frac{2(1 - \ln s)}{s^2},$$

显然当 $2 < s < e$ 时, $m'(s) > 0$; 当 $s > e$ 时, $m'(s) < 0$, 从而 $m(s)$ 在 $(2, e)$ 单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 单调递减, 所以

$$m(s)_{\max} = m(e) = 6 + \frac{2}{e}, \text{ 又 } s > 2 > 1, \text{ 所以 } \frac{2 \ln s}{s} > 0, \text{ 从而 } m(s) > 6, \text{ 于是 } 6 < m(s) \leq 6 + \frac{2}{e}, \text{ 则 } [\log_{\sqrt{x}} f(x)] = 6.$$

17. 解: (1) $a_1 = 1, a_{n+1} = S_{n+1} - S_n, S_{n+1} - S_n + S_n \cdot S_{n+1} = 0$, 得到 $\frac{1}{S_{n+1}} - \frac{1}{S_n} = 1$, 3 分

因此 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 故 $\frac{1}{S_n} = n$ 5 分

(2) 依题意可得: $c_n = 4n \cdot 2^n$,

$$T_n = 4 \cdot 2^1 + 8 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2^3 + \cdots + 4n \cdot 2^n, \quad \textcircled{1} \quad \text{..... 8 分}$$

$$2T_n = 4 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^4 + \cdots + 4n \cdot 2^{n+1}. \quad \textcircled{2} \quad \text{..... 9 分}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 得

$$T_n = 4n \cdot 2^{n+1} - 4(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) \quad \text{..... 11 分}$$

$$= (n-1) \cdot 2^{n+3} + 8. \quad \text{..... 12 分}$$

18. 解: (1) 由所得数据列成的频数分布表, 得: 样本平均数

$$\bar{x} = 4.5 \times 0.05 + 5.5 \times 0.18 + 6.5 \times 0.28 + 7.5 \times 0.26 + 8.5 \times 0.17 + 9.5 \times 0.06 = 7. \quad \text{..... 4 分}$$

(2) 由 (1) 知 $z \sim N(7, 1.61)$, 6 分

$$\therefore P(z > 8.27) = \frac{1 - 0.6826}{2} = 0.1587, \quad \text{..... 8 分}$$

设成绩合格的个数为 x , 则 $x \sim B(5, 0.1587)$, 10 分

$$\text{故 } Ex = 5 \times 0.1587 = 0.7935. \quad \text{..... 12 分}$$

19. (1) 证明: $\because AE = BE, O$ 为 AB 中点, $\therefore EO \perp AB$, 1 分

$AD \perp$ 面 ABE , $EO \subset$ 面 ABE , $\therefore AD \perp EO$, 2 分

又 $AB \cap AD = A$, $\therefore EO \perp$ 面 $ABCD$, 3 分

又 $EO \subset$ 面 EOC , 所以面 $EOC \perp$ 面 $ABCD$ 5 分

(2) 连 AF, BF , 点 F 与点 E 关于面 $ABCD$ 对称, 而 $EO \perp$ 面 $ABCD$,

故 E, O, F 三点共线, 在平面 $AEBF$ 内, 过点 A 作 $Ay \perp AF$,

以 A 为坐标原点, AF, Ay, AD 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示空间
直角坐标系, 7 分

设 $BC = 1$, 则 $A(0, 0, 0), D(0, 0, 2), E(1, \sqrt{3}, 0), F(2, 0, 0), B(3, \sqrt{3}, 0),$

$C(3, \sqrt{3}, 1)$, 8 分

则 $O(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $\because EO \perp$ 面 $ABCD$, $\therefore$ 面 OCD 的一个法向量为 $\vec{EO} =$

$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), \vec{DF} = (2, 0, -2), \vec{FC} = (1, \sqrt{3}, 1)$, 9 分

设面 CDF 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \vec{DF} = 2x - 2z = 0 \\ n \cdot \vec{FC} = x + \sqrt{3}y + z = 0 \end{cases}$,

取 $x = 1$, 得 $n = (1, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1)$, 10 分

$\cos \langle n, \vec{EO} \rangle = \frac{n \cdot \vec{EO}}{|n| \cdot |\vec{EO}|} = \frac{3\sqrt{30}}{20}$, 11 分

二面角 $O-CD-F$ 为锐角, 故二面角 $O-CD-F$ 余弦值为 $\frac{3\sqrt{30}}{20}$ 12 分

20. 解: (1) 由题意可知 $F(-c, 0)$, 直线 $l \perp x$ 轴时, $|AB| = \frac{2b^2}{a} = \sqrt{2}$, 1 分

$\tan \angle AOB = \frac{2 \tan \angle AOF}{1 - \tan^2 \angle AOF} = 2\sqrt{2}$, 解得 $\tan \angle AOF = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\sqrt{2}$, 2 分

$\because \angle AOF \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \tan \angle AOF = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|AF|}{|FO|} = \frac{b^2}{c}$, 3 分

得 $b = c = 1, a = \sqrt{2}$, 故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 依题意直线 l 斜率一定存在且不为零, 设 $l: y = k(x + 1)$, 5 分

代入椭圆方程得: $(2k^2 + 1)x^2 + 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{-4k^2}{2k^2 + 1}, y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 + 2) = \frac{2k}{2k^2 + 1}$ 7 分

故 $M(\frac{-2k^2}{2k^2 + 1}, \frac{k}{2k^2 + 1})$, 8 分

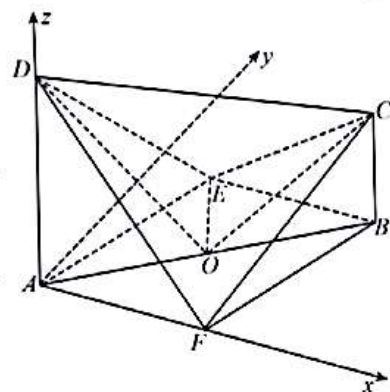
直线 $l': y - \frac{k}{2k^2 + 1} = -\frac{1}{k}(x + \frac{2k^2}{2k^2 + 1})$, 令 $y = 0$, 则 $P(\frac{-k^2}{2k^2 + 1}, 0)$, 9 分

$\because PM \perp MF, OQ \perp PO$, $\therefore \vec{PM} \cdot \vec{PF} = |PM|^2, \vec{PO} \cdot \vec{PQ} = |PO|^2$,

$\therefore \frac{\vec{PM} \cdot \vec{PF}}{\vec{PO} \cdot \vec{PQ}} = \frac{|PM|^2}{|PO|^2} = \frac{(\frac{-k^2}{2k^2 + 1} - \frac{-2k^2}{2k^2 + 1})^2 + (\frac{k}{2k^2 + 1})^2}{(\frac{-k^2}{2k^2 + 1})^2} = \frac{k^2 + 1}{k^2} = 1 + \frac{1}{k^2}$, 11 分

$\because k^2 \in (0, +\infty)$, $\therefore 1 + \frac{1}{k^2} \in (1, +\infty)$, $\therefore \frac{\vec{PM} \cdot \vec{PF}}{\vec{PO} \cdot \vec{PQ}} \in (1, +\infty)$ 12 分

21. 解: (1) $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}$, 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $F(t) = g(x) = t \ln t + (1 - t) \ln(1 - t), t \in (0, 1)$ 2 分



$$F'(t) = \ln t + 1 - [\ln(1-t) + 1] = \ln \frac{t}{1-t}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

当 $t \in (0, \frac{1}{2})$, $F'(t) < 0$, $F(t)$ 单调递减; 当 $t \in (\frac{1}{2}, 1)$, $F'(t) > 0$, $F(t)$ 单调递增.

$$\text{所以 } F(t) \text{ 的最小值为: } F(\frac{1}{2}) = -\ln 2. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) h(x) = x \ln x,$$

$$h(x_1) + h(x_2) - h(x_1 + x_2) = x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 - (x_1 + x_2) \ln(x_1 + x_2) = x_1 \ln \frac{x_1}{x_1 + x_2} + x_2 \ln \frac{x_2}{x_1 + x_2} = (x_1 + x_2) [\frac{x_1}{x_1 + x_2} \ln \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2} \ln \frac{x_2}{x_1 + x_2}] = (x_1 + x_2) [h(\frac{x_1}{x_1 + x_2}) + h(\frac{x_2}{x_1 + x_2})]. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由(1)知 } h(\frac{x_1}{x_1 + x_2}) + h(\frac{x_2}{x_1 + x_2}) = F(\frac{x_1}{x_1 + x_2}) \geq -\ln 2,$$

$$\text{所以 } h(x_1) + h(x_2) - h(x_1 + x_2) \geq -(x_1 + x_2) \cdot \ln 2. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } k \leq -\ln 2. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{解: (1) 由已知可得圆 } C_1 \text{ 的直角坐标方程为: } (x-1)^2 + y^2 = 1, \text{ 则点 } M \text{ 的直角坐标为 } (2, 0), \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{圆 } C_2 \text{ 的半径为 } 3, \text{ 故圆 } C_2 \text{ 的直角坐标方程为 } (x-3)^2 + y^2 = 9. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{依题意设 } A, B \text{ 极坐标分别为 } A(\rho_1, \alpha), B(\rho_2, \alpha),$$

$$\text{圆 } C_2 \text{ 的极坐标方程为 } \rho = 6 \cos \alpha, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{则 } |AB| = \rho_2 - \rho_1 = 6 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = 4 \cos \alpha, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\because OM \text{ 为圆 } C_1 \text{ 直径, 故 } OA \perp AM, \therefore |AM| = 2 \sin \alpha, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{则在 Rt}\triangle ABM \text{ 中, } \angle ABM = \frac{\pi}{6}, |AB| = \sqrt{3} |AM|, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{则 } 4 \cos \alpha = 2\sqrt{3} \sin \alpha, \text{ 故 } \tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$23. \text{解: (1) 若 } a=1, \text{ 则 } f(x) = |x+1| + |2x+1| = \begin{cases} -2-3x, & x \in (-\infty, -1) \\ -x, & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ 3x+2, & x \in (-\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \in (-\infty, -1), \text{ 则 } f(x) > 3-x, \text{ 即为 } -2-3x > 3-x, \text{ 得 } x \in (-\infty, -\frac{5}{2});$$

$$\text{当 } x \in [-1, -\frac{1}{2}], \text{ 则 } f(x) > 3-x, \text{ 即为 } -x > 3-x, \text{ 得 } x \in \emptyset;$$

$$\text{当 } x \in (-\frac{1}{2}, +\infty), \text{ 则 } f(x) > 3-x, \text{ 即为 } 3x+2 > 3-x, \text{ 得 } x \in (\frac{1}{4}, +\infty); \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{综上: 不等式 } f(x) > 3-x \text{ 的解集为 } (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (\frac{1}{4}, +\infty). \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{当 } x \in [-1, 1] \text{ 时, } f(x) \leq |x+3|, \text{ 等价于 } |2ax+1| \leq 2, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{只需 } \begin{cases} |1-2a| \leq 2 \\ |1+2a| \leq 2 \end{cases}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$