2021-2022 学年第一学期合肥六中教育集团瑶海分校
文化素养测评新高三数学（理科）参考答案

第 I 卷　选择题（共 60 分）

一、单选题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	D	B	A	C	C	A	B	C	D

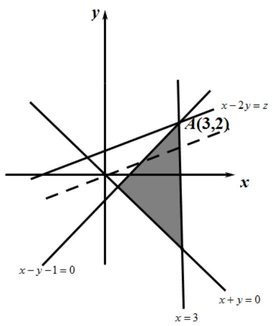
【解析】1. 因为$\dfrac{x-3}{x-5}<0$，所以$(x-3)(x-5)<0$，所以$3<x<5$，所以$A=(3,5)$

又因为$B=(4,6)$，所以$A\cap B=(4,5)$，故选：D.

2．$z=\dfrac{3+4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\dfrac{2+11\mathrm{i}}{5}$，$z$的共轭复数为$\dfrac{2-11\mathrm{i}}{5}$，所以虚部为-$\dfrac{11}{5}$，

故选：A.

3．约束条件所表示的可行域如图阴影部分（包含边界），



令$z=x-2y$，则$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{z}{2}$，由直线截距的几何意义知，

当直线$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{z}{2}$经过$A(3,2)$时在$y$轴上截距最大，此时$z$最小，

所以z的最小值为$z_{\min}=3-2\times2=-1$，

即$x-2y$的最小值是-1，

故选：B.

4．因为随机变量X服从正态分布$N(1,\sigma^2)$，所以曲线关于$x=1$对称，

因为$P(X\geq3)=0.2$，所以$P(-1<X<3)=1-2\times0.2=0.6$. 故选：D

5. 当$n=1$时，$a_2=-\dfrac{1}{1+a_1}=-\dfrac{1}{2}$，当$n=2$时，$a_3=-\dfrac{1}{1+a_2}=-2$，当$n=3$时，$a_4=-\dfrac{1}{1+a_3}=1$，

当$n=4$时，$a_5=-\dfrac{1}{1+a_4}=-\dfrac{1}{2}$，所以数列$\{a_n\}$的周期为 3，因为$2021=3\times673+2$，

所以$a_{2021}=a_2=-\dfrac{1}{2}$．故选：B

6. 因为$f(-x)=\dfrac{\sin(-2x)}{\ln|-x|}=-\dfrac{\sin 2x}{\ln x}=-f(x)$　　所以$f(x)$为奇函数，所以排除 B，D，

又$f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{\ln\dfrac{\pi}{6}}<0$，所以排除 C. 故选：A

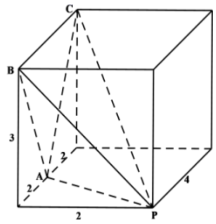
7．将丙班、丁班捆绑与乙、戊、己全排列，有$A_4^4A_2^2=48$种，除去开头以及丙班、丁班之间还有 4 个空选一个排甲有 4 种情况，所以不同安排方案共有$48\times4=192$种，故选：C.

8．圆$x^2+y^2-6x=0$的标准方程为$(x-3)^2+y^2=9$　又因为点$P(1,1)$为圆的弦 AB 的中点，

圆心与点 P 确定直线的斜率为$\dfrac{1-0}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$　故弦 AB 所在直线的斜率为 2

所以直线 AB 的直线方程：y-1=2（x-1）即 2x-y-1=0 故选：C.

9．由图可知，$A=2,T=\left[1-(-2)\right]\times 2=6=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\dfrac{\pi}{3}$ ，



又函数 $f\left(x\right)$过点$\left(1,2\right)$，

所以 $\dfrac{\pi}{3}\times 1+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，

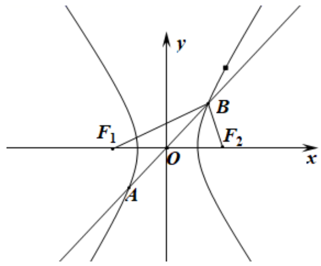
解得 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\left(k\in Z\right)$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}, f\left(x\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

故选：A.

10．几何体为三棱锥 $P-ABC$，直观图如下，$V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 4\times 3\times 2=4$．故选:B

11．如图所示：



由题意可知，$|OB|=|OF_1|=|OF_2|=c$，$\angle BOF_2=60^{\circ}$，

所以 $|BF_2|=c,|BF_1|=\sqrt{3}c$，

由双曲线的定义可得，$\sqrt{3}c-c=2a$，

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

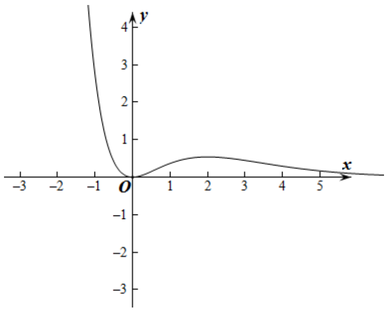
故选：C.

12．解：函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$ 的导数为 $f'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$，

当 $0<x<2$时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；

当 $x>2$ 或 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

可得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 0，



在 $x=2$ 处取得极大值 $\dfrac{4}{e^2}<1$，作出 $y=f(x)$ 的图象如下所示，

因为 $f^2\left(x\right)-tf\left(x\right)+t-1=0$恰好有 4 个不相等的实根，

所以$\left[f\left(x\right)-1\right]\left[f\left(x\right)-(t-1)\right]=0$，

解得 $f\left(x\right)=1$或 $f\left(x\right)=t-1$，当 $f\left(x\right)=1$时，有1个实数解，

所以 $f\left(x\right)=t-1$应有3个实数根，即函数 $y=f\left(x\right)$与 $y=t-1$有 3 个交点，

所以 $0<t-1<\dfrac{4}{e^2}$，即 $1<t<\dfrac{4}{e^2}+1$ 故选：D

第 II 卷 非选择题（共 90 分）

二、填空题：**本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分**．

13. $\exists x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，$1+\tan x_0>2$．　14．$2\sqrt{3}$　15．9　16．$\dfrac{1}{3}$

【解析】13. 由全称命题的否定可知，命题“$\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，$1+\tan x\le 2$”的否定为

“$\exists x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，$1+\tan x_0>2$”．

故答案为：$\exists x_0\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，$1+\tan x_0>2$.

14. 因为平面向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为60°，$\vec{a}=(2,0)$，$|\vec{b}|=1$，

所以$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{4+4\times2\times1\times\cos60^\circ+4}=2\sqrt{3}$. 故答案为：$2\sqrt{3}$

15. 由$C:y^2=4x$可得焦点$F(1,0)$，准线方程为$x=-1$，因为$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{P}=1$

所以$|AF|+4|BF|=\left(|AF|+4|BF|\right)\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}\right)=1+\frac{|AF|}{|BF|}+\frac{4|BF|}{|AF|}+4$

$\geq2\sqrt{\frac{|AF|}{|BF|}\cdot\frac{4|BF|}{|AF|}}+5=9$，当且仅当$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{4|BF|}{|AF|}$，即$|AF|=2|BF|$取等号，

所以$|AF|+4|BF|$的最小值为9　　故答案为：9

16 设阴影部分面积为 S，由题意得两个图象的交点为$C(1,1)$，

$\therefore S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\left(\frac{2}{3}\times1^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\times1^3\right)-\left(\frac{2}{3}\times0^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\times0^3\right)=\frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$.

三、解答题：**共** 70 **分**。**解答**应写出文字说明、证明过程或演算步骤。（17 题 10 **分**，18.19.20.21.22 题每题 12 **分**）

17．（1）设$\{a_n\}$的公差为d，则由已知条件得$a_1+2d=2$，$3a_1+\frac{3\times2}{2}d=\frac{9}{2}$，

化简得$a_1+2d=2$，$a_1+d=\frac{3}{2}$，解得$a_1=1,d=\frac{1}{2}$，　……………………………4 分

故通项公式为$a_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$.　……………………………6 分

（2）由（1）得$b_1=1$，$b_4=a_{15}=8$，设$\{b_n\}$的公比为q，则$q^3=\frac{b_4}{b_1}=8$，得$q=2$，

故$\{b_n\}$的前n项和$T_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{1\times\left(1-2^n\right)}{1-2}=2^n-1$.　……………………………10 分

18．解：（1）随机变量 X 的可能取值有 0，1，2，3，且 X 服从超几何分布.

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_9^3}=\frac{1}{84}$，　……………………………1 分

$P(X=1)=\frac{C_6^1C_3^2}{C_9^3}=\frac{3}{14}$，　……………………………3 分

$P(X=2)=\frac{C_6^2C_3^1}{C_9^3}=\frac{15}{28}$，　……………………………5 分

$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{5}{21}$.　……………………………6 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3

P	$\frac{1}{84}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{21}$

$E(X)=0\times\frac{1}{84}+1\times\frac{3}{14}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{21}=2.$ …………………………8 分

（2）若甲没有通过预选赛，则甲答对了 1 道或 0 道.

所以甲没有通过预选赛的概率 $P=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{84}+\frac{3}{14}=\frac{19}{84}$. ………………12 分

19．解：（1）由已知得 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B-\sin C=0$， ………………2 分

∴ $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin\left(A+C\right)-\sin C=0$，$\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-\sin C=0$，……4 分

∵ $\sin C\neq 0$，∴ $\sqrt{3}\sin A-\cos A-1=0$，∴ $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，又 $A\in\left(0,\pi\right)$，故 $A=\frac{\pi}{3}$. ………6 分

（2）由已知得 $\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bccosA\\ \frac{1}{2}bcsinA=\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$， …………………………8 分

∴ $\begin{cases}7=b^2+c^2-bc\\ bc=6\end{cases}$，∴ $\begin{cases}b^2+c^2=13\\ bc=6\end{cases}$， …………………………9 分

解得 $\begin{cases}b=2\\ c=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=3\\ c=2\end{cases}$. …………………………12 分

20．（1）因为 $AB//CD$，$\angle ADC=\angle BCD=120^\circ$，$AB=2AD=2$，

所以 $CD=1$，又四边形 $EDCF$ 是正方形, 所以 $EF//BG$，$EF=BG$， 故四边形 $EFBG$ 为平行四边形

故 $EG//BF$ 因为 $EG\not\subset$ 平面 BDF，$BF\subset$ 平面 BDF 所以 $EG//$ 平面 BDF …………6 分

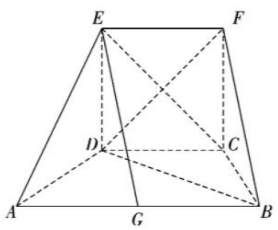
（2）因为平面 $EDCF\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $EDCF$ 为正方形，

所以 $ED\perp DC$，所以 $ED\perp$ 平面 $ABCD$， 在 ΔABD 中，因为 $\angle ADC=120^\circ$，故 $\angle DAB=60^\circ$，

又 $AB=2AD=2$，所以由余弦定理，得 $BD=\sqrt{3}$， 所以 $\angle ADB=90^\circ$，$\angle CDB=\angle CBD=30^\circ$，

则 $BC=DC=ED=1$，平面 BCE 将五面体分成四棱锥 $E-ABCD$ 和三棱锥 $B-CEF$

故 $V=V_{E-ABCD}+V_{B-CEF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………12 分



21. 解：（1）由题意得 $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$2b=2$， 所以 $a=2$，$b=1$， ……………2 分

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………4 分

（2）直线 l 的方程为 $y=kx-2$，代入椭圆 C 的方程， 整理得 $\left(1+4k^2\right)x^2-16kx+12=0$. 5 分

由题意，$\Delta=256k^2-48\left(1+4k^2\right)=16\left(4k^2-3\right)>0$， 设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$

则 $x_1+x_2=\frac{16k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}$. …………………………7 分

弦长$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$，　　　　…………………………8 分

点O到直线l的距离$d=\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，　　所以$\triangle AOB$的面积

$S=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$，

…………………………9 分

令$t=4k^2-3(t>0)$，则$S=\dfrac{4t}{t^2+4}=\dfrac{4}{t+\dfrac{4}{t}}\le\dfrac{4}{2\sqrt{t\cdot\dfrac{4}{t}}}=1$，当且仅当$t=2$时取等号. 所以$S_{\max}=1$，

…………………………11 分

对应的$t=2$，可解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，满足题意.　　　　…………………………12 分

22.（1）由题意，当$a=\dfrac{1}{2}$，可得函数$f(x)=\dfrac{x}{2}+1$，$g(x)=\ln x+\dfrac{1}{2x}+1$.

则$F(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x-\dfrac{1}{2x}$，可得$F'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{(x-1)^2}{2x^2}\ge 0$，……………2 分

所以$F(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，且$F(1)=0$，　　　　…………………………3 分

综上，当$x=1$时，$F(x)=0$，可得$f(x)=g(x)$；

当$x\in(0,1)$时，$F(x)<0$，可得$f(x)<g(x)$；

当$x\in(1,+\infty)$时，$F(x)>0$，可得$f(x)>g(x)$.　　　　…………………………4 分

（2）设$h(x)=ax+1-\ln x+\dfrac{a-1}{x}-2a,x\ge 1$，

可得$h'(x)=a-\dfrac{1}{x}-\dfrac{a-1}{x^2}=\dfrac{ax^2-x-(a-1)}{x^2}=\dfrac{(x-1)(ax+a-1)}{x^2}$，且$h(1)=0$，　……………6 分

若$a=0$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$[1,+\infty)$单调递减，$h(x)<h(1)=0$，不合题意，舍去；…7 分

若$a\ne 0$时，可得$h'(x)=\dfrac{(x-1)[a(x+\dfrac{a-1}{a})]}{x^2}=\dfrac{a(x-1)(x-\dfrac{1-a}{a})}{x^2}$，　…………………………9 分

令$h'(x)=0$，解得$x_1=1$和$x_2=\dfrac{1-a}{a}$，

①当$a\ge\dfrac{1}{2}$时，当$x\ge 1$，可得$h'(x)\ge 0$，$h(x)$在$[1,+\infty)$单调递增，

所以$h(x)\ge h(1)=0$，此时$f(x)\ge g(x)$；

②当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，令$h'(x)>0$，解得$x>\dfrac{1-a}{a}$；

令$h'(x)<0$，解得$x<\dfrac{1}{a}-1$，

所以$h(x)$在$\left(1,\dfrac{1}{a}-1\right)$单调递减，在$(\dfrac{1-a}{a},+\infty)$单调递增，

所以$h(x)<h(1)=0$，不合题意，舍去；

③当$a<0$时，可得$h'(x)\le 0$，$h(x)$在$[1,+\infty)$单调递减，不合题意，舍去.

综上可得，实数a的取值范围是$[\dfrac{1}{2},+\infty)$.　　　　…………………………12 分