

2021-2022 学年第一学期合肥六中教育集团瑶海分校 文化素养测评新高三数学（理科）试卷

注意事项：

1. 本试卷满分 150 分，考试时长 120 分钟。
2. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。请将答案写在答题卡上。考试结束后，只交“答题卡”。

第 I 卷 选择题（共 60 分）

一、单选题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-3}{x-5} < 0 \right\}$ ，集合 $B = \{x \mid 4 < x < 6\}$ ，则 $A \cap B =$ ：

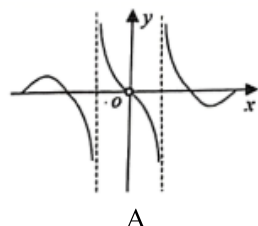
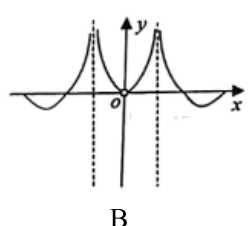
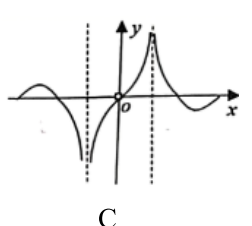
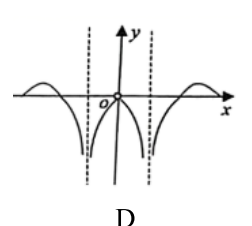
A. (3,6) B. [3,6) C. [4,5) D. (4,5)
2. 复数 $z = \frac{3+4i}{2-i}$ 的共轭复数的虚部是：

A. $-\frac{11}{5}$ B. $\frac{11}{5}$ C. -1 D. $-\frac{2}{5}$
3. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x-y-1 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ 则 $x-2y$ 的最小值是：

A. -3 B. -1 C. $\frac{3}{2}$ D. 9
4. 已知随机变量 $X \sim N(1, \sigma^2)$, $P(X \geq 3) = 0.2$ ，则 $P(-1 < X < 3) =$ ：

A. 0.1 B. 0.2 C. 0.4 D. 0.6
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = -\frac{1}{1+a_n}$ ，则 $a_{2021} =$ ：

A. 1 B. $-\frac{1}{2}$ C. -2 D. -1
6. 函数 $f(x) = \frac{\sin 2x}{\ln|x|}$ 的图象大致是：

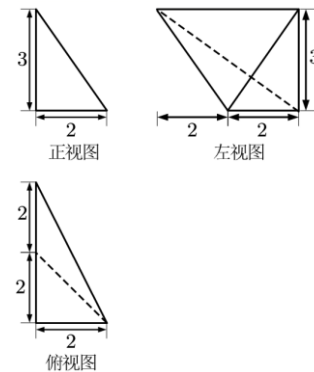
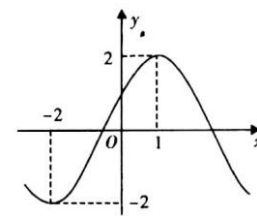
A B C D
7. 受新冠肺炎疫情影响，某学校按上级文件指示，要求错峰放学，错峰有序吃饭。高二年级一层楼有甲、乙、丙、丁、戊、己六个班排队吃饭，甲班不能排在第一位，且丙班、丁班必须排在一起，则这六个班排队吃饭的不同安排方案共有：

A. 120 种 B. 156 种 C. 192 种 D. 240 种

8. 若点 $P(1,1)$ 为圆 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 的弦 AB 的中点，则弦 AB 所在直线的方程为：

A. $2x + y - 3 = 0$ B. $x + 2y - 3 = 0$ C. $2x - y - 1 = 0$ D. $x - 2y + 1 = 0$
9. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的解析式为：

A. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$ B. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$ C. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$ D. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$



10. 若一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为：

A. 8 B. 4 C. 12 D. 14
11. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，第九章“勾股”，讲述了“勾股定理”及一些应用，直角三角形的两直角边与斜边的长分别称“勾”“股”“弦”，且“勾² + 股² = 弦²”. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，直线 $y = \sqrt{3}x$ 交双曲线左、右两支于 A, B 两点，若 $|BF_1|, |BF_2|$ 恰好是 $\text{Rt} \triangle F_1BF_2$ 的“勾”“股”，则此双曲线的离心率为：

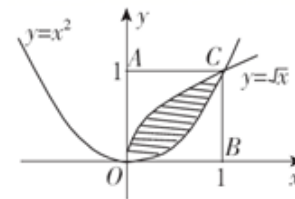
A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3} + 1$ D. $\sqrt{5}$
12. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{e^x} (x \in \mathbf{R})$ ，若关于方程 $f^2(x) - tf'(x) + t - 1 = 0$ 恰好有 4 个不相等的实根，则实数 t 的取值范围为：

A. $\left(\frac{4}{e^2}, 2\right) \cup (2, e)$ B. $\left(\frac{4}{e^2}, 1\right)$ C. $\left(\frac{4}{e^2}, e\right)$ D. $\left(1, \frac{4}{e^2} + 1\right)$

第 II 卷 非选择题（共 90 分）

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若命题“ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], 1 + \tan x \leq 2$ ”的否定为_____。
14. 平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° ， $\vec{a} = (2, 0)$ ， $|\vec{b}| = 1$ ，则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____。
15. 设 F 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点， A, B 是抛物线 C 上两个不同的点，若直线 AB 恰好经过焦点 F ，则 $|AF| + 4|BF|$ 的最小值为_____。
16. 曲线 $y = x^2$ 和曲线 $y = \sqrt{x}$ 围成一个叶形图（如图所示阴影部分），其面积是_____。



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 = 2$ ，前 3 项和 $S_3 = \frac{9}{2}$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$ ， $b_4 = a_{15}$ ，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (本题满分 12 分)2021 年 7 月 1 日是中国共产党建党 100 周年纪念日，为迎接这一天的到来，某高校组织了一场党史知识竞赛，分为预选赛和决赛两部分，已知预选赛的题目共有 9 道，随机抽取 3 道让参赛者回答，规定至少要答对其中 2 道才能通过预选赛，某参赛人员甲只能答对其中 6 道，记甲抽取的 3 道题目中能答对的题目数为 X 。

(1) 求随机变量 X 的分布列和数学期望；

(2) 求甲没有通过预选赛的概率。

19. (本题满分 12 分)在 $\triangle ABC$ 中， $a\cos C + \sqrt{3}c\sin A = b + c$ 。

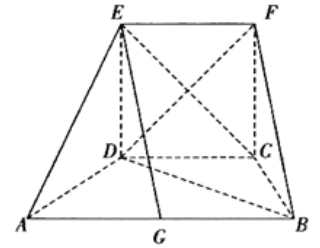
(1) 求 A ；

(2) 若 $a = \sqrt{7}$ ， $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，求 b ， c 。

20. (本题满分 12 分)在如图所示的五面体 $ABCDEF$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2AD = 2$ ， $\angle ADC = \angle BCD = 120^\circ$ ，四边形 $EDCF$ 为正方形，平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$ ， G 为线段 AB 的中点。

(1) 证明： $EG \parallel$ 平面 BDF ；

(2) 求该五面体的体积。



21. (本题满分 12 分)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，短轴长为 2。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设过点 $P(0, -2)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A ， B ，求当 $\triangle AOB$ 的面积取得最大值时 k 的值。

22. (本题满分 12 分)已知函数 $f(x) = ax + 1 (x > 0)$ ， $g(x) = \ln x - \frac{a-1}{x} + 2a$ 。

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$ ，比较函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小；

(2) 若 $x \geq 1$ 时， $f(x) \geq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

密封线内不要答题