高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　因为$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x|1\leqslant x<5,x\in \mathbf{Z}\}=\{1,2,3,4\}$,所以$A\cap B=\{1,2,3\}$.故选A.

2. B　复数$z=\frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{-\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}=-1-2\mathrm{i}$,故$\bar{z}=-1+2\mathrm{i}$,对应点的坐标为$(-1,2)$,位于第二象限.故选B.

3. C　因为$52.4-50.8=1.6$,$52.7-52.4=0.3$,所以第三产业增加值占国内生产总值比重不能组成递增的等差数列,故A错误;因为$7.0<7.1$,所以第一产业增加值占国内生产总值比重逐年降低不正确,故B错误;因为第三产业增加值占国内生产总值比重均超过50%,所以第三产业增加值占国内生产总值比重最大,故C正确;第二产业增加值占国内生产总值比重的中位数为39.7,故D错误.故选C.

4. A　设等比数列$\{a_n\}$公比为q,则$\frac{a_4+a_5}{a_1+a_2}=q^3=8$,解得$q=2$,则$a_1+a_2=a_1(1+q)=3a_1=1$,解得$a_1=\frac{1}{3}$,所以$a_7=a_1q^6=\frac{1}{3}\times 2^6=\frac{64}{3}$.故选A.

5. D　因为$\frac{7\pi}{10}-\alpha+\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{7\pi}{10}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)$,所以$\sin\left(\frac{7\pi}{10}-\alpha\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{5}{13}$.故选D.

6. C　$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=-1-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1}=\sqrt{3}$.故选C.

7. A　由$3^b=7$,得$\log_3 7=b$,所以$\log_{21}56=\frac{\log_3(7\times 2^3)}{\log_3(3\times 7)}=\frac{\log_3 7+\log_3 2^3}{\log_3 3+\log_3 7}=\frac{b+3\times\frac{1}{a}}{1+b}=\frac{ab+3}{a+ab}$.故选A.

8. B　从6个医疗小组选出3位主治医师,有C_6^3种不同的方法;不妨设这3位主治医师分别为甲、乙、丙,调整为均不在原来的医疗小组且每组均有1位主治医师,有2种不同的方法.所以调整的不同方案数为$C_6^3\times 2=40$.故选B.

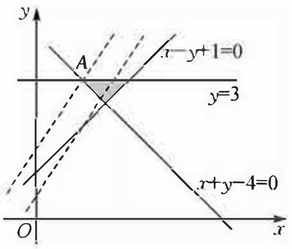
9. B　若$n\perp\beta$,$\alpha\perp\beta$,则$n/\!/\alpha$,或$n\subset\alpha$,又$m\perp\alpha$,所以$m\perp n$,故①正确;若$m/\!/\alpha$,$n/\!/\beta$,且$m/\!/n$,则$\alpha/\!/\beta$或α与β相交,故②错误;若$\alpha\cap\beta=n$,$m\subset\beta$,且$m\perp n$,则m与α不一定垂直,故③错误;若$m/\!/n$,$n\subset\alpha$,$\alpha/\!/\beta$,$m\not\subset\beta$,由线面平行判定可知$m/\!/\beta$,故④正确.故选B.

10. D　设双曲线的右焦点为F',半焦距为c,连接MF',由点N为MF的中点,点O为FF'的中点,知ON为$\triangle FMF'$的中位线,所以$MF'\perp x$轴,得$M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$,又由三角形中位线定理可知$|ON|=\frac{1}{2}|MF'|$,直线$MF$的方程:$y=x+c$,故$N(0,c)$,得$\frac{b^2}{a}=2c$,$b^2=2ac$,$c^2-a^2=2ac$,即$e^2-1=2e$,又$e>1$,所以$e=1+\sqrt{2}$.故选D.

11. B　当$0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$时,$0\leqslant\frac{2x}{\pi}<1$,则$\left[\frac{2x}{\pi}\right]=0$,此时对应的方程为$|y|=2|\sin\omega x|$,又过点$P\left(\frac{\pi}{4},2\right)$,所以$\left|\sin\frac{\omega\pi}{4}\right|=1$,所以$\frac{\omega\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以$\omega=2+4k(k\in\mathbf{Z})$,又$0<\omega<5$,所以$\omega=2$;当$\frac{3\pi}{2}\leqslant x<2\pi$时,$3\leqslant\frac{2x}{\pi}<4$,则$\left[\frac{2x}{\pi}\right]=3$,此时对应的方程为$|y|=\frac{1}{2}|\sin 2x|$,又$\frac{5\pi}{3}\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$,所以$|y|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(2\times\frac{5\pi}{3}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}$.故选B.

12. C　因为l过点F且倾斜角为$\frac{\pi}{4}$,所以直线l的方程为$x=y+\frac{p}{2}$,与抛物线方程联立,得$y^2-2py-p^2=0$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=2p$,$y_1y_2=-p^2$,所以$x_1+x_2=3p$,$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$,又$|AB|=p+x_1+x_2=4p=8$,所以$p=2$,所以$y^2=4x$;不妨设$y_1>0$,当$y>0$时,$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$,所以过$A$的切线斜率为$k_A=y'|_{x=x_1}=\frac{1}{\sqrt{x_1}}$,同理可得过$B$的切线斜率为$k_B=y'|_{x=x_2}=-\frac{1}{\sqrt{x_2}}$,所以$k_Ak_B=-\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}=-\frac{2}{p}=-1$,所以$QA\perp QB$,故A正确;$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\sqrt{8p^2}=2\sqrt{2}$,故B正确;$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=1$,故C错误;设点$M$到准线的距离为$d$,若$M(1,1)$,则$|PM|+|PF|\geqslant d=1+\frac{p}{2}=2$,则D正确.故选C.

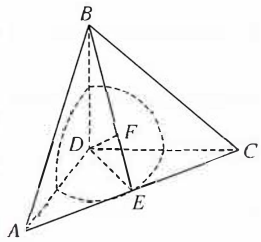
13. -3　作出可行域(如图阴影部分)，$z=3x-2y$ 得 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}z$，平移直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}z$，由图可知当直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}z$ 经过点 $A(1,3)$ 时，直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}z$ 在 y 轴上的截距最大，此时 z 最小，且 $z_{\min}=-3$.



14. $ex+y+1=0$　当 $x>0$ 时，$-x<0$，则 $f(-x)=e^{x}+1$，又 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)=-e^{x}-1$，$f'(x)=-e^{x}$，$f(1)=-e-1$，所以 $k=f'(1)=-e$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $ex+y+1=0$.

15. 63(2分)　405(3分)　从第1圈到第9圈石板数依次组成等差数列 $\{a_n\}$，且 $a_1=9$，$d=9$，所以 $a_7=9+6\times 9=63$；$S_9=9\times 9+\frac{9\times 8}{2}\times 9=405$.

16. $\left(\frac{10}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)\pi$　翻折后形成的几何体如图所示，由题意知 $DA=DC=DB=4$，$BA=BC=4\sqrt{2}$，所以 $DB\perp DA$，$DB\perp DC$，从而可以证得 $DB\perp$ 平面 ACD，由 E 为 AC 的中点可得 $DE\perp AC$，易证 $AC\perp$ 平面 BDE，从而平面 $BDE\perp$ 平面 ABC，所以球 D 与侧面 BDC、侧面 BDA，侧面 ADC 的交线分别为 $\frac{1}{4}$ 圆弧，$\frac{1}{4}$ 圆弧，$\frac{1}{3}$ 圆弧，过 D 作 $DF\perp BE$，垂足为 F，易求得 $DF=\frac{4}{\sqrt{5}}<2$，故以 D 为球心，为半径的球与平面 ABC 也相交，易知该交线是以 F 为圆心，$\sqrt{4-\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 为半径的圆，所以球与三棱锥 $B-ADC$ 各面交线的长度和为 $\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\times 2+2\pi\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\left(\frac{10}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)\pi$.



17. 解：(1)因为 $\frac{\sqrt{3}b}{2c-\sqrt{3}a}=\frac{\cos B}{\cos A}$，由正弦定理得 $\frac{\sqrt{3}\sin B}{2\sin C-\sqrt{3}\sin A}=\frac{\cos B}{\cos A}$，…………………… 2分

即 $\sqrt{3}\sin B\cos A=(2\sin C-\sqrt{3}\sin A)\cos B$，

$\sqrt{3}\sin(A+B)=2\sin C\cos B$，$\sqrt{3}\sin C=2\sin C\cos B$. …………………… 4分

因为 C 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. …………………… 6分

(2)由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即 $2^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{6}$，…………………… 8分

所以 $4=a^2+c^2-\sqrt{3}ac\geqslant 2ac-\sqrt{3}ac$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，

所以 $ac\leqslant\frac{4}{2-\sqrt{3}}=4(2+\sqrt{3})$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，…………………… 10分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{1}{2}\times 4(2+\sqrt{3})\times\frac{1}{2}=2+\sqrt{3}$，

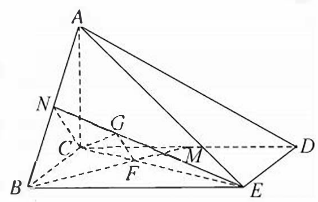
所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $2+\sqrt{3}$. …………………… 12分

18. (1)证明：延长 EG 交 AB 于点 N，连接 CN.

因为 G 为 $\triangle ABE$ 的重心，所以 N 为 AB 中点，且 $\frac{EG}{GN}=2$. …………………… 1分

因为 $CM\parallel BE$，M 为 CD 中点，所以 $\frac{EF}{FC}=\frac{BE}{CM}=2$，…………………… 2分

所以 $\frac{EF}{FC}=\frac{EG}{GN}$，所以 $GF\parallel NC$. …………………… 3分



又 $GF\not\subset$ 平面 ABC，$NC\subset$ 平面 ABC，

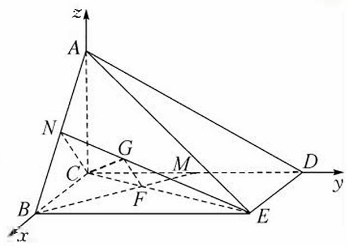
所以 $GF\parallel$ 平面 ABC. …………………… 4分

(2)解：因为平面 $ABC\perp$ 平面 $BCDE$，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCDE=BC$，$DC\perp BC$，$DC\subset$ 平面 $BCDE$，

所以 $DC\perp$ 平面 ABC.

因为 $AC\subset$ 平面 ABC，所以 $DC\perp AC$.

同理 $BC\perp AC$. ………………………………………………………………………………………… 5 分



又 $BC\perp CD$，所以 CA,CB,CD 两两垂直，以 C 为原点，直线 CB,CD,CA 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系（如图所示），则 $A(0,0,6\sqrt{3})$，$B(3,0,0)$，$E(3,6,0)$，$D(0,6,0)$，所以 $N\left(\frac{3}{2},0,3\sqrt{3}\right)$，因为$\frac{EG}{GN}=2$，所以 $G(2,2,2\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{CG}=(2,2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CE}=(3,6,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,6,-6\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DE}=(3,0,0)$， … 6 分

设平面 GCE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CG}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x_1+2y_1+2\sqrt{3}z_1=0,\\ 3x_1+6y_1=0,\end{cases}$取 $y_1=1$，则 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x_1=-2$，

即 $\boldsymbol{m}=\left(-2,1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$； ………………………………………………………………………… 7 分

设平面 ADE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}6y_2-6\sqrt{3}z_2=0,\\ 3x_2=0,\end{cases}$取 $z_2=2$，则 $y_2=2\sqrt{3}$，$x_2=0$，即 $\boldsymbol{n}=(0,2\sqrt{3},2)$. ………… 8 分

设平面 GCE 与平面 ADE 所成锐二面角为 θ，则

所以 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{5+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{12+4}}=\frac{1}{2}$. ………………………………………………… 10 分

又 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)由 $\bar{x}=\frac{1}{6}\times(0.1+0.2+0.3+0.4+0.5+0.6)=0.35$，

$\bar{y}=\frac{1}{6}\times(1.1+1.3+1.6+1.5+2.0+2.1)=1.6$， ………………………………………………… 1 分

$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=0.1\times1.1+0.2\times1.3+0.3\times1.6+0.4\times1.5+0.5\times2.0+0.6\times2.1=3.71$，

$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=0.1^2+0.2^2+0.3^2+0.4^2+0.5^2+0.6^2=0.91$， ………………………………………… 3 分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{3.71-6\times0.35\times1.6}{0.91-6\times0.35^2}=2$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=1.6-2\times0.35=0.9$， ………………………………………………………… 5 分

故 $\hat{y}$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=2x+0.9$. ………………………………………………………… 6 分

(2)当 $x=0.1$，$\hat{y}=2\times0.1+0.9=1.1$，残差为 $1.1-1.1=0$，

当 $x=0.2$，$\hat{y}=2\times0.2+0.9=1.3$，残差为 $1.3-1.3=0$，

当 $x=0.3$，$\hat{y}=2\times0.3+0.9=1.5$，残差为 $1.6-1.5=0.1$， ……………………………………… 7 分

当 $x=0.4$，$\hat{y}=2\times0.4+0.9=1.7$，残差为 $1.5-1.7=-0.2$，

当 $x=0.5$，$\hat{y}=2\times0.5+0.9=1.9$，残差为 $2.0-1.9=0.1$，

当 $x=0.6$，$\hat{y}=2\times0.6+0.9=2.1$，残差为 $2.1-2.1=0$， ……………………………………… 8 分

由这 6 棵 A 树木中残差为零的有 3 棵，占比为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，故“长势标准”的概率为$\frac{1}{2}$，

由题意得随机变量 $X\sim B\left(80,\frac{1}{2}\right)$， ………………………………………………………… 10 分

故随机变量 X 的数学期望为 $E(X)=80\times\frac{1}{2}=40$，

随机变量 X 的方差为 $D(X)=80\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=20$. ………………………………………… 12 分

20. (1)解：由 $S_1=3S_2$，得$\frac{1}{2}\times|AF|\times|PF|\times\sin\angle AFP=3\times\frac{1}{2}\times|BF|\times|QF|\times\sin\angle BFQ$， ………… 2 分

因为$\angle AFP=\angle BFQ$，$|AF|=3$，$|BF|=1$，所以 $|PF|=|QF|$， ……………………………… 4 分

根据对称性，得 $PQ\perp x$ 轴，

故直线 l 的方程为 $x=1$. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)证明：$A(-2,0)$，$B(2,0)$. 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由题意，得 $y_1y_2\neq0$.

设直线 l 的方程为 $x=my+1$，代入 $3x^2+4y^2=12$ 并消去 x，得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$.（※） …………………………………………………… 8 分

因为 $k_{AP}=\frac{y_1}{x_1+2}$，$k_{BQ}=\frac{y_2}{x_2-2}$，

所以 $\frac{k_{AP}}{k_{BQ}}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{y_1(my_2+1-2)}{y_2(my_1+1+2)}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}=\frac{my_1y_2-(y_1+y_2)+y_2}{my_1y_2+3y_2}$， …………………… 10 分

将（※）代入，得 $\frac{k_{AP}}{k_{BQ}}=\frac{m\cdot\frac{-9}{3m^2+4}-\frac{-6m}{3m^2+4}+y_2}{m\cdot\frac{-9}{3m^2+4}+3y_2}=\frac{\frac{-3m}{3m^2+4}+y_2}{\frac{-9m}{3m^2+4}+3y_2}=\frac{1}{3}$，

故四边形 $APBQ$ 的对边 AP 与 BQ 所在直线的斜率的比值恒为常数. …………………………………… 12 分

21.(1)证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-1-x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-1$. ……………………………… 1 分

由 $f'(x)>0$，得 $x>0$；$f'(x)<0$，得 $x<0$， ……………………………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， …………………………………………… 3 分

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，也是 $f(x)$ 的最小值点，且 $f(x)_{\min}=f(0)=0$， ……………………… 4 分

故当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant0$. ………………………………………………………………………………… 5 分

(2)解：由 $f(x)\geqslant x^2(x\geqslant0)$，得 $ax\leqslant e^x-1-x^2(x\geqslant0)$，

当 $x=0$ 时，上述不等式恒成立. ……………………………………………………………………………… 6 分

当 $x>0$ 时，$a\leqslant\frac{e^x-1-x^2}{x}$. ………………………………………………………………………… 7 分

令 $g(x)=\frac{e^x-1-x^2}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(e^x-2x)x-(e^x-1-x^2)}{x^2}=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$. ……………… 8 分

考虑到(1)，当 $x>0$ 时，$e^x-x-1>0$. ……………………………………………………………………… 9 分

所以由 $g'(x)<0$，得 $0<x<1$；由 $g'(x)>0$，得 $x>1$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的极小值点，也是 $g(x)$ 的最小值点，且 $g(x)_{\min}=g(1)=e-2$， ……………… 11 分

所以 $a\leqslant e-2$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,e-2]$. ………………………………………………………………… 12 分

第 22 题（本大题 10 分）

已知数列$\{a_n\}$是公比大于 1 的等比数列($n\in N*$)，$a_2=4$，且 $1+a_2$是a_1与a_3的等差中项.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式，

(2)设$b_n=\log_2 a_n$，S_n为数列$\{b_n\}$的前 n 项和，记$T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{S_n}$，求$T_n$.

【答案】解：(1)数列$\{a_n\}$是公比 q 大于 1 的等比数列($n\in N*$)，$a_2=4$，

且 $1+a_2$是a_1与a_3的等差中项，可得 $2(1+a_2)=a_1+a_3$，

即有 $2\times(1+4)=\frac{4}{q}+4q$，解得 $q=2$($\frac{1}{2}$舍去)，$a_1=2$，——3 分

则$a_n=2^n$；——4 分

(2)$b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$，——5 分

可得$S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$，$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，——7 分

$T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\ldots+\frac{1}{S_n}=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$. ——10 分