

安徽省六校教育研究会 2021 届高三联考

数学能力测试（文）

命题：淮北一中六校联考文科数学命题组

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

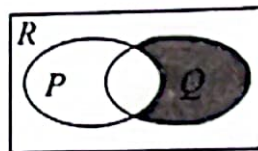
考试时间 120 分钟，满分 150 分

一、选择题：（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设全集为实数集 R ，集合 $P = \{x | x \leq 1 + \sqrt{2}, x \in R\}$ ，集合 $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ ，则图中阴影部分表示的集合为

()

- A. $\{4\}$ B. $\{3, 4\}$ C. $\{2, 3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$



2. 已知平面 α ，直线 a, b, l ，且 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$ ，则“ $l \perp a$ 且 $l \perp b$ ”是“ $l \perp \alpha$ ”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $\sqrt{2} \approx 1.41421$ ，如果对应关系 f 将 n 对应到 $\sqrt{2}$ 的小数点后第 n 位上的数字，则 $f(2) + f(4) =$

()

- A. 5 B. 6 C. 3 D. 2

4. 关于复数 Z ，下列叙述正确的有()个

- ①若 $Zi = 1$ ，则 $Z = -i$
②任何两个复数都不能比较大小；
③实数没有共轭复数；
④复数 $3 - 2i$ 的实部是 3，虚部是 2.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 已知角 θ 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴非负半轴重合，终边在直线 $2x - y = 0$ 上，

$$\text{则 } \frac{\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) + \cos(\pi - \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) - \sin(\pi - \theta)} = ()$$

- A. -2 B. 2 C. 0 D. $\frac{2}{3}$

6. $M(a, b)$ 为圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 内异于圆心的一点，则直线 $ax + by = r^2$ 与该圆的位置关系 ()

- A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 相切或相交

7. 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法, 如图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图, 若输入的 $x = 2, n = 3$, 依次输入的 a 为 1, 2, 3, 4, 则输出的 $s =$ ()

- A. 11 B. 16 C. 26 D. 30

8. 现有一台不等臂的天平, 它有左右两个托盘, 若同一个物体放在左右托盘各测一次所得的质量分别是 a, b (单位: g), 则下列关于物体的真实质量 m 表述正确的是 ()

- A. $m < \sqrt{ab}$ B. $m > \frac{a+b}{2}$ C. $m < \frac{a+b}{2}$ D. $m > \sqrt{ab}$

9. 在发生某公共卫生事件期间, 有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续 14 天, 每天新增疑似病例不超过 6 人”. 根据过去 14 天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据, 一定符合该标志的是 ()

- A. 甲地: 总体均值为 1, 中位数为 1 B. 乙地: 总体均值为 1, 总体标准差大于 0
C. 丙地: 中位数为 1, 众数为 2 D. 丁地: 总体均值为 2, 总体方差为 1

10. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos 2A - 2\cos A + \frac{3}{2} = 0$ 且满足 $a = \sqrt{3}(b - c)$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等边三角形

11. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面是以 C 为直角的等腰直角三角形, 且 $AC = CC_1 = 1$, 在面对角线 BC_1 上存在一点 P 使 P 到 B_1 和 P 到 A 的距离之和最小, 则这个最小值是 ()

- A. 2 B. $1 + \sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

12. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, 以 O 为圆心 OF 为半径的圆与

双曲线 C 交于 P, Q 两点 (P, Q 均在 x 轴的上方), 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{3} + 1$

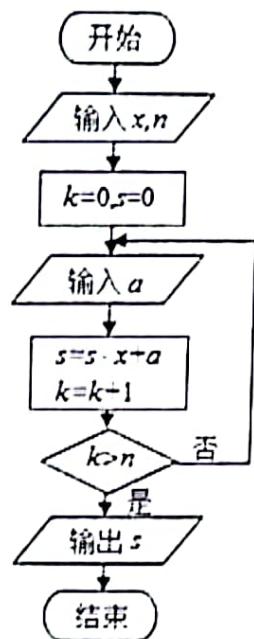
二、填空题: (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3$, 且 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

14. 某学校志愿者协会周末组织活动, 需要从甲乙两小组各安排一名志愿者去春风养老院, 若甲乙两小组各有 6 名志愿者且都是 3 名男生 3 名女生, 则派去服务的两名志愿者都是女生的概率是_____.

15. 设 F 为抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点, 直线 $y - x + 1 = 0$ 与抛物线 C 有公共点 M , 且 MF 与抛物线 C 的对称轴垂直, 则 $p =$ _____.

16. 关于函数 $f(x) = 2^{\cos(2x + \frac{\pi}{3})}$ 的性质, 下列表述正确的是_____.



- ① 是周期函数, 且最小正周期是 π ;
- ② 是轴对称图形, 且对称轴是直线 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$;
- ③ 定义域是 $\mathbb{R}$, 值域是 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$;
- ④ 是中心对称图形, 且对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, 1\right), k \in \mathbb{Z}$;
- ⑤ 单调递减区间是 $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right], k \in \mathbb{Z}$.

三、解答题: (共 70 分. 解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答)

(一) 必考题: (共 60 分)

17. (12 分)

某村海拔 1500 米, 交通极为不便, 被称为“云端上的村庄”, 系建档立卡贫困村. 该省政府办公厅组建了精准扶贫组进行定点帮扶, 扶贫组在实地调研和充分听取群众意见后, 立足当地独特优势, 大力发展高山蔬菜和生态黑猪, 有效带动了全村父老乡亲脱贫奔小康. 村民甲在企业帮扶下签订合同, 代养生态黑猪, 2016 年至 2020 年养殖黑猪的年收入 y (单位: 万元) 的数据如下表:

年份	2016	2017	2018	2019	2020
年份代号 x	1	2	3	4	5
年收入 y	5.6	6.5	7.4	8.2	9.1

(I) 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程;

(II) 利用 (I) 中的回归方程, 预测 2021 年该村民养殖黑猪的年收入.

附: 回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$

18. (12 分)

已知各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 a_5 = 33$, $a_2^2 = 25$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

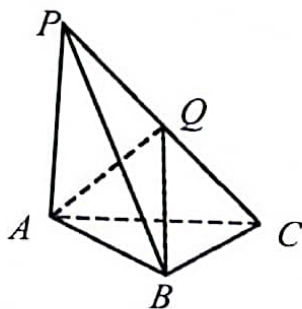
(II) 设 $b_n = 4^{n-2} + 3a_n$, 若 $a_n \in \mathbb{N}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $BC \perp AC$

(I) 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 PAC ;

(II) 若 $PA = 2$, $AC = BC = 1$, Q 为 PC 的中点, 求点 C 到平面 AQB 的距离.



20. (12分)

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\sqrt{2}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 假设椭圆 C 的上顶点是 P , 斜率为 k 的直线 l 与椭圆交于不同于点 P 的 A, B 两点, 直线 AP 的斜率是 k_1 , 直线 BP 的斜率是 k_2 , 若 $k_1 k_2 = \frac{3}{2}$, 证明直线 l 过定点.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+a) - a$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: (共 10 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑. 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 那么按所做第一题计分)

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 $C_1: x+y=1$ 与曲线 $C_2: \begin{cases} x=2+2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 写出曲线 C_1, C_2 的极坐标方程;

(II) 在极坐标系中, 已知 $l: \theta = \alpha (\rho > 0)$ 与 C_1, C_2 的公共点分别为 A, B , $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,

当 $\frac{|OB|}{|OA|} = 4$ 时, 求 α 的值.

22. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知 $f(x) = |ax+1| + |x-1|$

(I) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x) < 2$ 的解集;

(II) 若 $x \in (1, 2)$ 时不等式 $f(x) < x$ 成立, 求 a 的取值范围.

安徽省六校教育研究会 2021 届高三联考

文科数学试卷参考答案

一、选择题

1. B 2. B 3. C 4. A 5. B 6. C 7. C 8. C 9. D 10. B 11. D 12. D

二、填空题

13. $\frac{2\pi}{3}$ 14. $\frac{1}{4}$ 15. 2 16. ①②③⑤

三、解答题

17. (12 分)

【解析】：(I) 由所给数据计算得

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(5.6+6.5+7.4+8.2+9.1) = 7.36 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = 4+1+0+1+4 = 10$$

$$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (1-3)(5.6-7.36) + (2-3)(6.5-7.36) + \dots + (5-3)(9.1-7.36) = 8.7$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{8.7}{10} = 0.87 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 7.36 - 0.87 \times 3 = 4.75$$

$$\hat{y} = 0.87x + 4.75 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(II) 将 2021 年的年份代号 $x=6$ 代入 (I) 中的回归方程, 得

$$\hat{y} = 0.87 \times 6 + 4.75 = 9.97,$$

故预测 2021 年该村民养殖黑猪的年收入是 9.97 万元.12 分

18. (12 分)

【解析】：(I) 设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $a_2^2 = 25$, 所以 $a_2 = 5$,

因为 $a_1 a_5 = 33$, 所以 $(a_2 - d)(a_2 + 3d) = 33$, 所以 $d = 2$ 或 $d = \frac{4}{3}$.

当 $d = 2$ 时, $a_1 = 3$, 此时 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1$;

当 $d = \frac{4}{3}$ 时, $a_1 = \frac{11}{3}$, 此时 $a_n = \frac{11}{3} + \frac{4}{3}(n-1) = \frac{4}{3}n + \frac{7}{3}$5 分

(II) 因为 $a_n \in N$, 所以 $a_n = 2n+1$.

因为 $b_n = 4^{n-2} + 3a_n$, 所以 $b_n = 4^{n-2} + 3(2n+1)$,7 分

所以 $T_n = 4^{-1} + 3 \times 3 + 4^0 + 3 \times 5 + 4^1 + 3 \times 7 + \cdots + 4^{n-2} + 3(2n+1)$

$$= (4^{-1} + 4^0 + 4^1 + 4^{n-2}) + 3(3 + 5 + 7 + \cdots + 2n+1)$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1-4^n)}{1-4} + 3 \times \frac{(3+2n+1)n}{2}$$

$$= \frac{4^{n-1}}{3} + 3n^2 + 6n - \frac{1}{12}. \quad \text{.....12 分}$$

19. (12 分)

【解析】: (I) 证明: $\because PA \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , $\therefore PA \perp BC$.

又 $\because BC \perp AC$, $PA \cap AC = A$, $PA \subset$ 平面 PAC , $AC \subset$ 平面 PAC ,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC , 又 $\because BC \subset$ 平面 PBC ,

$\therefore$ 平面 $PBC \perp$ 平面 PAC5 分

(II) 解: $\because PA = 2$, $AC = BC = 1$, Q 是中点

$\therefore AQ = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $BQ = \frac{3}{2}$, $AB = \sqrt{2}$, 假设点 C 到平面 AQB 的距离是 d

$$\cos \angle AQB = \frac{AQ^2 + BQ^2 - AB^2}{2AQ \cdot BQ} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{9}{4} - 2}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \angle AQB = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{.....8 分}$$

$$V_{C-ABQ} = V_{Q-ABC}$$

$$\frac{1}{3} S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1$$

$$d = \frac{2}{3} \quad \text{.....12 分}$$

20. (12 分)

【解析】: (I) 设 $F(-c, 0)$, 由 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 知 $a = \sqrt{2}c$.

过点 F 且与 x 轴垂直的直线的方程为 $x = -c$, 代入椭圆方程有 $\frac{(-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

解得 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}b$, 于是 $\sqrt{2}b = \sqrt{2}$, 解得 $b = 1$,

又 $a^2 - c^2 = b^2$,

从而 $a = \sqrt{2}$, $c = 1$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$4 分

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $y = kx + m$, 由方程组 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$

消去 y , 整理得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$.

由根与系数的关系可得 $x_1 + x_2 = \frac{-4km}{1 + 2k^2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2}$ 6 分

所以

$$\begin{aligned} k_1 k_2 &= \frac{y_1 - 1}{x_1} \cdot \frac{y_2 - 1}{x_2} = \frac{y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1}{x_1 x_2} \\ &= \frac{k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 - k(x_1 + x_2) - 2m + 1}{x_1 x_2} \\ &= \frac{k^2 x_1 x_2 + (km - k)(x_1 + x_2) + m^2 - 2m + 1}{x_1 x_2} \\ &= \frac{k^2 \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2} + (km - k) \frac{-4km}{1 + 2k^2} + m^2 - 2m + 1}{\frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2}} \\ &= \frac{k^2(2m^2 - 2) - 4km(km - k) + (1 + 2k^2)(m^2 - 2m + 1)}{2m^2 - 2} \\ &= \frac{m^2 - 2m + 1}{2m^2 - 2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

解得 $m = 1$ (舍去), 或者 $m = -2$

所以直线方程为 $y = kx - 2$ 过定点 $(0, -2)$

.....12 分

21. (12 分)

【解析】: (I) 当 $a = 1$ 时 $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$

$$\text{由 } f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{得 } k = f'(1) = e - \frac{1}{2}, f(1) = e - \ln 2 - 1 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } y - (e - \ln 2 - 1) = (e - \frac{1}{2})(x - 1)$$

$$\text{即 } y = (e - \frac{1}{2})x - \ln 2 - \frac{1}{2} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) ①当 $a > 1$ 时, 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-a, +\infty)$, 此时 $f(0) = 1 - \ln a - a < 0$,

所以 $f(x) \geq 0$ 不恒成立, 不合题意舍去. \dots\dots\dots 7 分

②当 $a \leq 1$ 时, 易证 $e^x \geq x + 1, \ln x \leq x - 1$,

$$\text{所以 } \ln(x+a) \leq (x+a) - 1, \text{ 则 } -\ln(x+a) \geq -[(x+a) - 1],$$

$$\text{所以 } f(x) = e^x - \ln(x+a) - a \geq (x+1) - [(x+a) - 1] - a = 2 - 2a \geq 0,$$

综上所述 $a \leq 1$ \dots\dots\dots 12 分

22. (10 分)

【解析】: (I) 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho(\cos \theta + \sin \theta) = 1$, 即 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{曲线 } C_2 \text{ 的普通方程为 } (x-2)^2 + y^2 = 4, \text{ 即 } x^2 + y^2 - 4x = 0,$$

$$\text{所以曲线 } C_2 \text{ 的极坐标方程为 } \rho = 4 \cos \theta; \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 由 (I) 知 } |OA| = \rho_A = \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha}, |OB| = \rho_B = 4 \cos \alpha,$$

$$\frac{|OB|}{|OA|} = 4 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha) = 2(1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha) = 2 + 2\sqrt{2} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{|OB|}{|OA|} = 4 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha) = 2(1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha) = 2 + 2\sqrt{2} \sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}),$$

$$\text{因为 } \frac{|OB|}{|OA|} = 4 \text{ 所以 } 2 + 2\sqrt{2} \sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}) = 4, \quad \sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{由 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ 知 } \frac{\pi}{4} < 2\alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} \text{ 所以 } 2\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

所以 $\alpha = \frac{\pi}{4}$10 分

23. (10 分)

【解析】: (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = |2x + 1| + |x - 1|$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq -\frac{1}{2} \\ x + 2, & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases}$$

故不等式 $f(x) < 2$ 的解集为 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$5 分

(II) 当 $x \in (1, 2)$ 时 $f(x) < x$ 成立等价于当 $x \in (1, 2)$ 时 $|ax + 1| < 1$ 成立.

则 $-1 < ax + 1 < 1$, 即 $-2 < ax < 0$, 解得 $-1 \leq a < 0$10 分

2021 届高三六校联考 文科数学 学科考试命题双向细目表

题型	题号	分值	知识点	A	B	C	D	预估难度系数
				识记	理解	理解应用	综合应用	
选择题	1	5	集合运算文氏图	√				0.9
	2	5	简易逻辑、立体几何		√			0.8
	3	5	函数的概念		√			0.8
	4	5	复数的概念			√		0.7
	5	5	三角函数的概念及诱导公式			√		0.8
	6	5	均值不等式的应用			√		0.7
	7	5	算法与框图			√		0.7
	8	5	直线与圆的位置关系			√		0.7
	9	5	统计数据			√		0.7
	10	5	解三角形			√		0.7
	11	5	立体几何				√	0.5
	12	5	双曲线离心率				√	0.4
填空题	13	5	平面向量的夹角计算		√			0.8
	14	5	概率		√			0.7
	15	5	求抛物线的焦准距			√		0.6
	16	5	复合函数的性质				√	0.4
解答题	17	12	统计回归分析				√	0.7
	18	12	数列通项公式求和				√	0.7
	19	12	立体几何垂直点到面 距离体积公式				√	0.6
	20	12	直线和椭圆定点				√	0.5
	21	12	导数切线方程恒成立 分类讨论				√	0.4
	22	10	极坐标与参数方程			√		0.6
	23	10	不等式选讲			√		0.6