

A10 联盟 2021 数学(文)

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分

第I卷(选择题共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分.在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1.集合 $A = \{x | -1 < x < 3, x \in N^*\}$ 的非空子集个数为

- A.3 B.4 C.7 D.8

2.已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 则 $|3\vec{a} - \vec{b}| =$

- A. $3\sqrt{7}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{7}$ D.3

3.设 $a = \log_2 3$, $b = \log_{\frac{1}{5}} 2$, $c = 0.4^2$, 则

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $c > a > b$

4.已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m + 1)x^{2m-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 则实数 m 的值为

- A.0 B.1 C.2 D.0 或 2

5.若 $\sin(\pi + A) = -\frac{1}{2}$, 则 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - A\right) =$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上的点, E 是直线 BD 上一点, 且 $\overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BD}$, 若 $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $m-n =$

- A. $\frac{7}{5}$ B. $-\frac{7}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

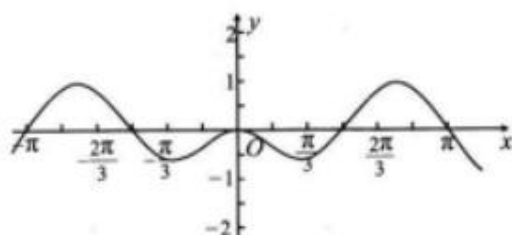
7.若 $m \in \mathbb{R}$, 则 “ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $m \cos x_0 + 2 < 0$ ” 是 “ $m < -2$ ” 的

- A.充分不必要条件 B.必要不充分条件
- C.充要条件 D.既不充分也不必要条件

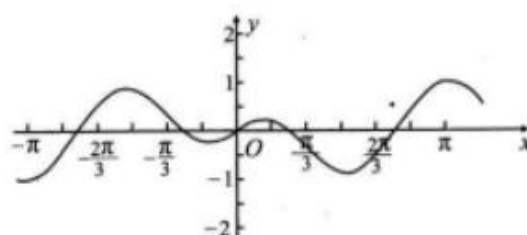
8.若直线 $2ax + by - 2 = 0$ ($a > 0, b > 0$) 过函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ 图象的对称中心, 则 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b}$ 最小值为

- A.4 B.6 C.8 D.9

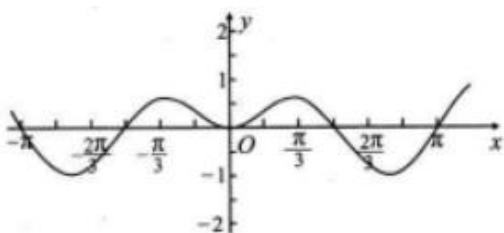
9.函数 $f(x) = \frac{1-5^x}{1+5^x}(1-2\sin^2 x)$ 的图象大致为



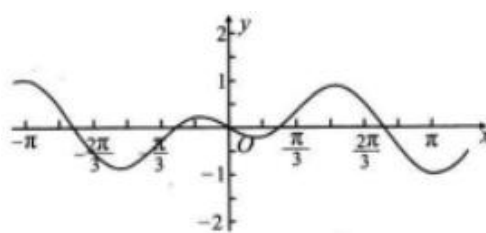
A.



B.



C.



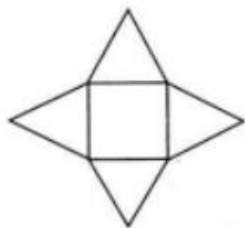
D.

10.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n, a_{n+1}, 2a_{n+2}$ 成等差数列, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=1, S_2=3$.

现有如下结论: ① $a_{n+8} = a_{n+2}$; ② $a_{2020} = -1$; ③ $S_{2020} = 3$, 则上述结论中, 正确的个数为

- A.0 B.1 C.2 D.3

11.2020 年新型冠状病毒肺炎蔓延全国, 作为主要战场的武汉, 仅用了十余天就建成了“小汤山”模式的火神山医院和雷神山医院, 再次体现了中国速度、中国方案、中国智慧. 随着国外疫情发展, 某地计划借鉴中国模式建设临时医院, 其占地是一个正方形和四个以正方形的边为底边、腰长为 400m 的等腰三角形组成的图形(如图所示), 为使占地面积最大, 则等腰三角形的底角为



- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{4}$

12. 已知函数 $f(x) = xe^x$, $g(x) = x \ln x$, 若 $f(x_1) = g(x_2) = t$, $t > 0$, 则 $\frac{\ln t}{x_1 x_2}$ 的最大值为

- A. $\frac{1}{e^2}$ B. $\frac{4}{e^2}$ C. $\frac{1}{e}$ D. $\frac{2}{e}$

第II卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.)

13. 已知函数 $f(x) = (4x-3)^2 - \ln x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.

14. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+y+2 \geq 0 \\ x-y+1 \leq 0 \\ y-1 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x - y$ 的最大值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = x + \ln \frac{1+x}{1-x}$, 若 $f(a) + f(a+1) > 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知首项为 1 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且当 n 为偶数时, $a_n - a_{n-1} = 1$, 当 n 为奇数且 $n > 1$ 时, $a_n - 2a_{n-1} = 1$. 若 $S_m > 4000$, 则 m 的最小值为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

已知 $m \in \mathbb{R}$, 命题 p : $\exists x_0 \in [-1, 1]$, 使得 $2x_0 - 2 \geq m^2 - 4m$ 成立; 命题 q : $\forall x \in [-1, 1]$, 不等式 $m \leq -x$ 恒成立.

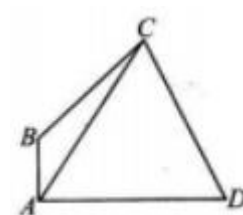
(I) 若 p 为真命题, 求 m 的取值范围;

(II) 若 $p \wedge q$ 为假, $p \vee q$ 为真, 求 m 的取值范围.

18.(本小题满分 12 分)

如图, 平面四边形 ABCD 是由钝角 $\triangle ABC$ 与锐角 $\triangle ACD$ 拼接而成, 且 $AC \cdot \cos \angle BAC = BC \cdot \sin \angle ABC$, $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$.

(I)求 $\angle CAD$ 的大小;



(II)若 $AC=4$, $CD=\sqrt{10}$, 求 $\triangle ACD$ 的面积.

19.(本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}(2a_n+n)$.

(I)求证: 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}+1\right\}$ 是等比数列;

(II)设 $c_n = a_n + n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20.(本小题满分 12 分)

已知 x_0 , $x_0 + \frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x) = \cos^2\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的两个相邻的零点.

(I)若对任意 $x \in \left[-\frac{2}{3}\pi, 0\right]$, $f(x) - m \leq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(II)若关于 x 的方程 $\frac{4\sqrt{3}}{3}f(x) - n = 1$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上有两个不同的解, 求实数 n 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{4^x} - \frac{\lambda}{2^{x+1}} + 1$ ($-2 \leq x \leq 1$).

(I) 当 $\lambda = 3$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域;

(II) 若函数 $f(x)$ 的最小值是 1, 求实数 a 的值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + 1$ ($a \in \mathbb{R}$).

(I) 若 $g(x) = x - f(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 的单调性;

(II) 若 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$, $h(x) = e^x - 1$ (其中 e 是自然对数的底数), 且 $a = 1$, $x \in (0, +\infty)$, 求证:

$h(x) > t(x) > f(x)$.

1 号卷 • A10 联盟 2021 届高三上学期 11 月段考

数学(文科)参考答案

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	B	C	A	B	B	D	D	D	C	C

1.A 由题意得, $A=\{1, 2\}$, 则集合 A 的非空子集个数为 3. 故选 A.

2.A 由题意得, $|\vec{3a}-\vec{b}|=\sqrt{9a^2-6ab+b^2}=\sqrt{36+18+9}=3\sqrt{7}$, 故选 A.

3.B $\because 1=\log_2 2 < \log_2 3=a < \log_2 4=2b=\log_{\frac{1}{5}} 2 < \log_{\frac{1}{5}} 1=0$, $0 < 0.4^2=c < 0.4^0=1$, $\therefore a > c > b$, 故选 B.

4.C 由题意得, $\begin{cases} m^2 2m+1=1 \\ 2m-1>0 \end{cases}$, 解得 $m=2$. 故选 C.

5.A $\because \sin(\pi+A)=-\sin A=-\frac{1}{2}$, $\therefore \sin A=\frac{1}{2}$, $\therefore \cos\left(\frac{3\pi}{2}-A\right)=-\sin A=-\frac{1}{2}$, 故选 A.

6.B $\because \overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{AD}$, $\therefore \overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AD}$,

$$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore m-n=-1-\frac{2}{5}=-\frac{7}{5} \cdot \text{故选 B.}$$

7.B 令 $f(x)=m \cos x+2$. 当 $m \geq 0$ 时, $f(x) \in [2-m, 2+m]$, $\therefore 2-m < 0$, 解得 $m > 2$;

当 $m < 0$ 时, $f(x) \in [2+m, 2-m]$, $\therefore 2+m < 0$, 解得 $m < -2$.

$\therefore \exists x_0 \in \mathbb{R}$, $m \cos x_0 + 2 < 0$ 是 “ $m < -2$ ” 的必要不充分条件, 故选 B.

8.D 由题意得, 函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ 图象的对称中心为 $(1, 2)$, $\therefore 2a+2b-2=0$, $\therefore a+b=1$,

$$\therefore \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b} \right) (a+b) = 4 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{4b}{a} = 5 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} = 9, \text{ 当且仅当 } \frac{a}{b} = \frac{4b}{a}, \text{ 即 } a = 2b = \frac{2}{3} \text{ 时取等}$$

号, 故选 D.

9.D 由题意得, $f(x) = \frac{1-5^x}{1+5^x} \cos 2x$,

$$\therefore f(-x) = \frac{1-5^{-x}}{1+5^{-x}} \cos(-2x) = \frac{5^x-1}{5^x+1} \cos 2x = -f(x), \text{ 则函数 } f(x) \text{ 为奇函数, 排除 A, C; 又 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0,$$

排除 B, 故选 D.

10.D 由题意得, $2a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n+2}$, 即 $a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$. 又 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

$$\therefore a_3 = 1, a_4 = -1, a_5 = -2, a_6 = -1, a_7 = 1, a_8 = 2, \dots,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的周期为 6, 故①正确; $a_{2020} = a_4 = -1$, 故②正确; $S_{2020} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3$, 故③正确,

故选 D.

11.C 设等腰三角形的顶角为 α , 由三角形的面积公式可得 4 个等腰三角形的面积和为

$$4 \times \frac{1}{2} \times 400 \times 400 \sin \alpha = 320000 \sin \alpha.$$

由余弦定理可得正方形边长为 $\sqrt{400^2 + 400^2 - 2 \times 400 \times 400 \cos \alpha} = 400\sqrt{2-2\cos \alpha}$,

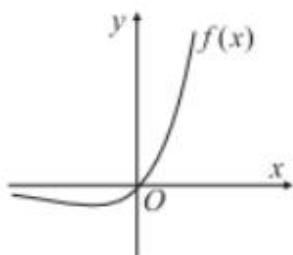
故正方形面积为 $160000(2-2\cos \alpha) = 320000(1-\cos \alpha)$

则所求占地面积为 $320000(1-\cos \alpha + \sin \alpha) = 320000 \left[\sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right]$, $\therefore$ 当 $\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

即 $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ 时, 占地面积最大, 此时底角为 $\frac{\pi - \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$, 故选 C.

12.C 由题意得, $x_1 e^{x_1} = t$, $x_2 \ln x_2 = t$, 即 $e^{\ln x_2} \ln x_2 = t$, $f'(x) = (1+x)e^x$, 易得 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 又当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) < 0$, $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 作函数 $f(x) = xe^x$ 的图象如图所示. 由图可知, 当 $t > 0$ 时, $f(x) = t$ 有唯一解, 故 $x_1 = \ln x_2$, 且 $x_1 > 0$,

$\therefore \frac{\ln t}{x_1 x_2} = \frac{\ln t}{x_2 \ln x_2} = \frac{\ln t}{t}$. 设 $h(t) = \frac{\ln t}{t}$, $t > 0$ 则 $h'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$, 令 $h'(t) = 0$ 解得 $t = e$, 易得 $h(t)$ 在 $(0, e)$



上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore h(t) \leq h(e) = \frac{1}{e}$, 即 $\frac{\ln t}{x_1 x_2}$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$. 故选 C.

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.)

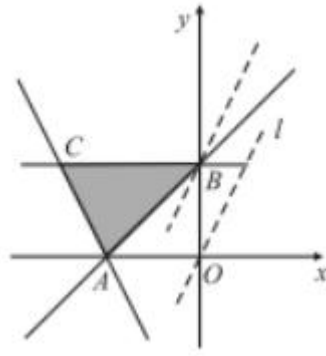
13. $7x - y - 6 = 0$

由题意得, $f'(x) = 32x - 24 - \frac{1}{x}$, $\therefore f'(1) = 7$, $f(1) = 1$, $\therefore$ 所求切线方程为 $y - 1 = 7(x - 1)$, 即 $7x - y - 6 = 0$.

14.-1

画出可行域如图所示, 其中 $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-\frac{3}{2}, 1)$.

作直线 $l: y = 2x$, 平移直线 l , 当其经过点 B 时, $z = 2x - y$ 取得最大值, 最大值为 $2 \times 0 - 1 = -1$.



15. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 解得 $-1 < x < 1$ ，且 $f(-x) = -x + \ln \frac{1-x}{1+x} = -\left(x + \ln \frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ ，

$\therefore f(x)$ 为奇函数，且 $f(x) = x + \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \ln \frac{-(1-x)+2}{1-x} = x + \ln \left(-1 + \frac{2}{1-x}\right)$ 为增函数。

$\therefore f(a) + f(a+1) > 0$ ， $\therefore f(a+1) > -f(a) = f(-a)$ ， $\therefore a+1 > -a$ ，

解得 $a > -\frac{1}{2}$ ，联立 $\begin{cases} -1 < a < 1 \\ -1 < a+1 < 1 \end{cases}$ ，解得 $-1 < a < 0$ ， $\therefore -\frac{1}{2} < a < 0$ ，即实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 。

16.18

由题意得， $a_{2k} = a_{2k-1} + 1$ ， $a_{2k+1} = a_{2k} + 1$ ， $k \in \mathbb{N}^*$ ， $\therefore a_{2k+1} = 2(a_{2k-1} + 1) + 1 = 2a_{2k-1} + 3$ ，即

$a_{2k+1} + 3 = 2(a_{2k-1} + 3)$ 。又 $a_1 + 3 = 4$ ， $\therefore$ 数列 $\{a_{2k-1} + 3\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，

$\therefore a_{2k-1} = 4 \cdot 2^{k-1} - 3$ ， $a_{2k} = 4 \cdot 2^{k-1} - 2$ ，

$\therefore S_{\text{奇}} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k-1} = \frac{4(1-2^k)}{1-2} - 3k = 2^{k+2} - 4 - 3k$

$S_{\text{偶}} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k} = 2^{k+2} - 4 - 2k$

$\therefore S_{2k} = S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}} = 2^{k+2} - 8 - 5k$ $\therefore S_{18} = 2^{12} - 8 - 45 = 4043$ ， $S_{17} = 3021$

$\therefore$ 使得 $S_m > 4000$ 的最小整数 m 的值为 18。

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分.解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17.(本小题满分 10 分)

(I) $\because \exists x_0 \in [-1, 1]$, 使得 $2x_0 - 2 \geq m^2 - 4m$ 成立,

$$\therefore (2x_0 - 2)_{\max} \geq m^2 - 4m, \dots\dots 2 \text{ 分}$$

即 $m^2 - 4m \leq 0$, 解得 $0 \leq m \leq 4$, 即 m 的取值范围是 $[0, 4]$4 分

(II) 若命题 q 为真, 则 $m \leq (-x)_{\min}$, $\therefore m \leq -1$6 分

$\because p \wedge q$ 为假, $p \vee q$ 为真, $\therefore p, q$ 中一真一假.

当 p 真 q 假时, 则 $\begin{cases} 0 \leq m \leq 4 \\ m > -1 \end{cases}$, 解得 $0 \leq m \leq 4$;8 分

当 p 假 q 真时, $\begin{cases} m < 0 \text{ 或 } m > 4 \\ m \leq -1 \end{cases}$, 解得 $m \leq -1$.

综上所述, m 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [0, 4]$10 分

18.(本小题满分 12 分)

(I) 在 $\triangle ABC$ 中, $\because AC \cdot \cos \angle BAC = BC \cdot \sin \angle ABC$,

$\because$ 由正弦定理得, $\sin \angle ABC \cdot \cos \angle BAC = \sin \angle BAC \cdot \sin \angle ABC$,2 分

$\because \sin \angle ABC \neq 0$,

$\therefore \tan \angle BAC = 1$, 又 $\angle BAC \in (0, \pi)$,

$$\therefore \angle BAC = \frac{\pi}{4} \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because \angle BAD = \frac{\pi}{2}, \therefore \angle CAD = \frac{\pi}{4} \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 在 $\triangle ACD$ 中, $AC = 4$, $CD = \sqrt{10}$, $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$

由余弦定理得, $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos \angle CAD$,

即 $10=16+AD^2-2\times 4\times AD\frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $AD=\sqrt{2}$ 或 $AD=3\sqrt{2}$

当 $AD=\sqrt{2}$ 时, $\cos\angle ADC=\frac{2+10-16}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{10}}<0$, 此时 $\triangle ACD$ 为钝角三角形,

不满足题意, 舍去.....10 分

当 $AD=3\sqrt{2}$ 时, $\triangle ACD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot \sin\angle CAD=6$12 分

19.(本小题满分 12 分)

(I) 设 $b_n=\frac{a_n}{n}+1$, 则 $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{n+1}+1$,

$$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}+1}{\frac{a_n}{n}+1}=\frac{\frac{2a_n+n}{n}+1}{\frac{a_n}{n}+1}=\frac{2(a_n+n)}{a_n+n}=2 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\because b_1=a_1+1=2,$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列,

即数列 $\left\{\frac{a_n}{n}+1\right\}$ 是等比数列.....6 分

(II) 由(I)得, $b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$, 即 $\frac{a_n}{n}+1=2^n$

$$\therefore c_n=a_n+n=n\cdot 2^n \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\dots+(n-1)2^{n-1}+n2^n$$

$$\therefore 2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\dots+(n-1)2^n+n2^{n+1}$$

两式相减得 $-T_n=2+2^2+2^3+\dots+2^n-n\cdot 2^{n+1} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$\therefore T_n=(n-1)2^{n+1}+2 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20.(本小题满分 12 分)

$$\begin{aligned} \text{(I)} f(x) &= \frac{1 + \cos\left(2\omega x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \cos 2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x \right) + \cos 2\omega x \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + \frac{3}{2} \cos 2\omega x \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{3} \right) \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

由题意得, $f(x)$ 的最小正周期 $T = \pi$, $\omega > 0$, $\therefore \omega = 1$

$$\therefore f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because \text{对任意 } x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0 \right], f(x) - m \leq 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore m \geq f(x)_{\max} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\because x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0 \right], \therefore 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\pi, \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\therefore -1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore f(x)_{\max} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore m \geq \frac{3}{4}, \text{ 即实数 } m \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{3}{4}, +\infty \right) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{(II) 原方程可化为 } \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = n + 1$$

$$\text{即 } 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = n + 1, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\because -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \quad \therefore -\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because \text{关于 } x \text{ 的方程 } \frac{4\sqrt{3}}{3} f(x) - n = 1 \text{ 在 } x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right] \text{ 上有两个不同的解,}$$

$$\therefore \sqrt{3} \leq n+1 < 2, \text{ 解得 } \sqrt{3}-1 \leq n < 1, \text{ 即 } n \text{ 的取值范围为 } [\sqrt{3}-1, 1) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21.(本小题满分 12 分)

$$(I) \text{由题意得, } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \quad (-2 \leq x \leq 1)$$

$$\text{设 } t = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ 得 } g(t) = t^2 - \frac{\lambda}{2}t + 1 \quad \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 4\right) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } \lambda = 3 \text{ 时, } g(t) = t^2 - \frac{3}{2}t + 1 = \left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \quad \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 4\right) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore g(t)_{\max} = g(4) = 11, \quad g(t)_{\min} = g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{16}, \text{ 即 } f(t)_{\max} = 11, \quad f(t)_{\min} = \frac{7}{16}$$

$$\text{故函数 } f(x) \text{ 的值域为 } \left[\frac{7}{16}, 11\right] \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(II) \text{由(I)知, } g(t) = t^2 - \frac{\lambda}{2}t + 1 = \left(t - \frac{\lambda}{4}\right)^2 + 1 - \frac{\lambda^2}{16} \quad \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 4\right) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\textcircled{1} \text{当 } \frac{\lambda}{4} \leq \frac{1}{2}, \text{ 即 } \lambda \leq 2 \text{ 时, } g(t)_{\min} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5-\lambda}{4}, \text{ 令 } \frac{5-\lambda}{4} = 1, \text{ 得 } \lambda = 1; \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\textcircled{2} \text{当 } \frac{1}{2} < \frac{\lambda}{4} \leq 4, \text{ 即 } 2 < \lambda \leq 16 \text{ 时, } g(t)_{\min} = g\left(\frac{\lambda}{4}\right) = 1 - \frac{\lambda^2}{16},$$

$$\text{令 } 1 - \frac{\lambda^2}{16} = 1, \text{ 得 } \lambda = 0, \text{ 不合题意, 舍去; } \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

③当 $\frac{\lambda}{4} > 4$, 即 $\lambda > 16$ 时, $g(t)_{\min} = g(4) = 17 - 2\lambda$,

令 $17 - 2\lambda = 1$, 得 $\lambda = 8$, 不合题意, 舍去.

综上所述, 实数 a 的值为 1.....12 分

22.(本小题满分 12 分)

(I)由题意得, $g(x) = x - f(x) = x - a \ln x - 1$,

其定义域为 $(0, +\infty)$, $g'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x}$ 2 分

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 则函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, 易得函数 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.....4 分

(II)设 $u(x) = h(x) - t(x) = e^x - 1 - \frac{1}{2}x^2 - x$, 则 $u'(x) = e^x - x - 1$ 5 分

设 $m(x) = u'(x) = e^x - x - 1$, 则 $m'(x) = u''(x) = e^x - 1$,

当 $x > 0$ 时, $m'(x) > 0$ 恒成立,

则 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore m(x) > m(0) = 0$,

则 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore u(x) > u(0) = 0$,

$\therefore h(x) - t(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $h(x) > t(x)$ 7 分

当 $a=1$ 时, 设 $v(x) = t(x) - x = \frac{1}{2}x^2$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $v(x) > 0$, 即 $t(x) > x$ 9 分

设 $s(x) = x - \ln x - 1$, 则 $s'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

易得 $s(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore s(x) \geq s(1) = 0 ,$$

$$\therefore x \geq \ln x + 1 = f(x) \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore t(x) > x \geq f(x) , \text{ 即 } t(x) > f(x)$$

$$\text{综上所述, } h(x) > t(x) > f(x) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$