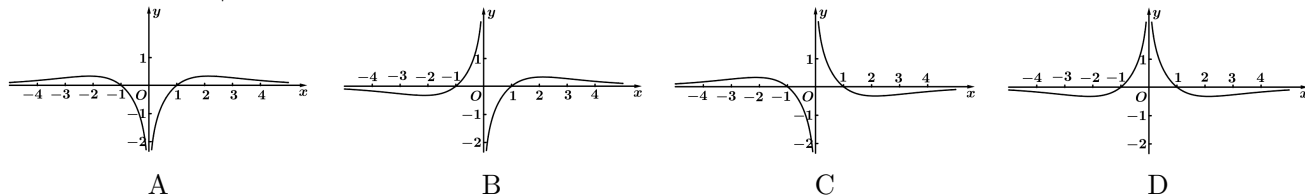


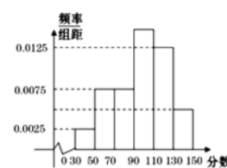
2021 届南开中学高三校模拟（数学）

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 0 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2x \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $[0, 2]$ B. $[1, 2]$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{1, 2, 3\}$
2. 设 a, b, c 为实数, 则 “ a, b, c 成等比数列” 是 “ a^2, b^2, c^2 成等比数列” 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $f(x) = \frac{2^x \ln x^2}{4^x + 1}$ 的大致图象为 ()



4. 某校有 1000 名学生参加扶贫知识政策答题比赛, 分初赛和复赛两个阶段进行, 规定: 初赛成绩小于等于 90 分的会被淘汰. 已知所有学生的初赛成绩均在区间 $(30, 150]$ 内, 其频率分布直方图如图所示, 则会被淘汰的人数为 ()



5. 已知 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 0.3$, $c = a^b$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
 A. $b > a > c$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $a > b > c$

6. 已知圆锥的顶点和底面圆周都在球 O 的球面上, 圆锥的母线长为 3, 侧面展开图的面积为 3π , 则球 O 的表面积等于 ()

7. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点 $M(1, m)$ ($m > 0$) 到其焦点的距离为 5, 双曲线 $\frac{x^2}{a} - y^2 = 1$ 的左顶点为 A , 若双曲线的一条渐近线与直线 AM 平行, 则实数 a 的值是 ()
 A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{25}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{3}$

8. 已知 $f(x) = \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{3}\right)$ 同时满足下列三个条件:

① $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 时 $|x_1 - x_2|$ 最小值为 $\frac{\pi}{2}$;

② $y = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 是奇函数;

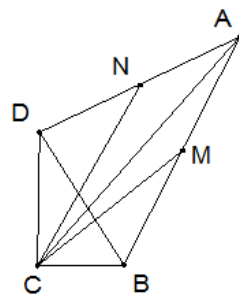
③ $f(0) > f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

若 $f(x)$ 在 $[0, t)$ 上没有最大值, 则实数 t 的范围是 ()

A. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$ B. $\left(0, \frac{11}{6}\pi\right]$ C. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{11}{12}\pi\right]$ D. $\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{11}{12}\pi\right]$

9. 如图, 已知 B, D 是直角 C 两边上的动点, $AD \perp BD$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3}$, $\angle BAD = \frac{\pi}{6}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$, 则 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 的最大值为 ()

A. $\frac{4 + \sqrt{13}}{2}$ B. $\frac{2 + \sqrt{13}}{2}$ C. $\frac{4 + \sqrt{13}}{4}$ D. $\frac{2 + \sqrt{13}}{4}$



10. 设复数 z 满足 $(1 + 2i)z = 3 - 4i$ (i 为虚数单位), 则 $|z|$ 的值为 _____.

11. $\left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 _____ (用数字作答).

12. 已知过点 $P(0, 1)$ 的直线 l 与直线 $4x - 3y = 0$ 垂直, l 与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ 相交于 A, B 两点, 则线段 AB 的长为 _____.

13. 2021 年是中国共产党成立 100 周年现有 A, B 两队参加建党 100 周年知识竞赛, 每队 3 人, 每人回答一个问题, 答对者为本队赢 1 分, 答错得 0 分; A 队中每人答对的概率均为 $\frac{1}{3}$, B 队中 3 人答对的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$, 且各答题人答题正确与否互不影响, 设 A 队总得分为随机变量 X , 则 X 的数学期望为 _____; 若事件 M 表示 “ A 队共得 2 分”, 事件 N 表示 “ B 队共得 1 分”, 则 $P(MN) =$ _____.

14. 已知实数 x, y 满足 $x > 1, y > 0$ 且 $x + 4y + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y} = 11$, 则 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$ 的最大值为 _____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) + m, & x \geq 0 \\ ax - b + 1, & x < 0 \end{cases}$ 其中 $m < -1$, 对于任意 $s \in \mathbf{R}$ 且 $s \neq 0$, 均存在唯一的实数 t , 使得 $f(s) = f(t)$, 且 $s \neq t$.

(1) 若 $m = -2, b =$ _____;

(2) 若关于 x 的方程 $|f(x)| = f\left(\frac{m}{3}\right)$ 有 4 个不相等的实数根, 则 a 的取值范围是 _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 且 $\frac{\cos B}{\cos C} = -\frac{b}{2a+c}$.

(1) 求 B 的大小;

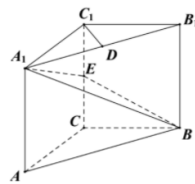
(2) 若 $a = 2, c = 3$, 求 $\cos A$ 和 $\sin(2A - B)$ 的值.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AA_1 = AC = BC = 2$, $\angle ACB = 90^\circ$, D, E 分别是 A_1B_1, CC_1 的中点.

(1) 求证: $C_1D \parallel$ 平面 A_1BE ;

(2) 求直线 BC_1 与平面 A_1BE 所成角的正弦值;

(3) 在棱 CC_1 上是否存在一点 P , 使得平面 PAB 与平面 A_1BE 所成二面角为 60° ? 若存在, 求出线段 CP 的长; 若不存在, 请说明理由.



18. 已知 A_1, A_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点, B 为椭圆 C 的上顶点, 点 A_2 到直线 A_1B 的距离为 $\frac{4\sqrt{7}b}{7}$, 椭圆 C 过点 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设直线 l 过点 A_1 , 且与 x 轴垂直, P, Q 为直线 l 上关于 x 轴对称的两点, 直线 A_2P 与椭圆 C 相交于异于 A_2 的点 D , 直线 DQ 与 x 轴的交点为 E , 当 $\triangle PA_2Q$ 与 $\triangle PEQ$ 的面积之差取得最大值时, 求直线 A_2P 的方程.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $b_1 = 1$.

(1) 证明数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{(-1)^{n-1} 4(n+1)}{(3 + 2\log_2 a_n)(3 + 2\log_2 a_{n+1})}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和;

(3) 若 $d_n = a_n \cdot \sqrt{b_n}$, 数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 D_n , 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $D_n \leq nS_n - a$, 求实数 a 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + k$ 的极大值为 $\frac{1+e}{e}$, 其中 $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.

(1) 求实数 k 的值.

(2) 若函数 $g(x) = e^x - \frac{a}{x}$, 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $g(x) \geq af(x)$ 恒成立.

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 证明: $x^2 f(x) > a \sin x + x^2 - 1$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	A	A	C	B	A	A	D	C

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.

10. $\sqrt{5}$

11. 40

12. $2\sqrt{3}$

13. 1, $\frac{2}{27}$

14. 9

15. 3, $(-6, -3)$

16.

(1) 由余弦定理, 得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, $\frac{\cos B}{\cos C} = -\frac{b}{2a + c}$, 整理得

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} = -\frac{b}{2a + c}.$$

整理得 $a^2 + c^2 - b^2 = -ac$,

所以 $\cos B = \frac{-ac}{2ac} = -\frac{1}{2}$.

因为 B 为三角形的内角, 所以 $B = \frac{2}{3}\pi$.

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 19$, $b = \sqrt{19}$,

又由于 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\sin A = \frac{a}{b} \sin B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$,

又因为 $B = \frac{2}{3}\pi$, A 为锐角,

所以 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{4\sqrt{19}}{19}$,

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{8\sqrt{3}}{19}$, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \frac{13}{19}$,

所以 $\sin(2A - B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = -\frac{21\sqrt{3}}{38}$.

17.

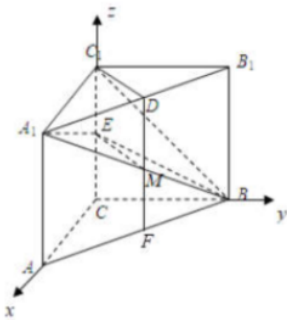
(1) 取 AB 的中点 F , 连接 DF , 交 A_1B 于点 M , 可知 M 为 DF 的中点, 连接 EM , 易知四边形 C_1DME 为平行四边形,

所以 $C_1D \parallel EM$,

又 $C_1D \not\subset$ 平面 A_1BE , $EM \subset$ 平面 A_1BE ,

所以 $C_1D \parallel$ 平面 A_1BE .

(2) 分别以 CA , CB , CC_1 所在的直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



可得 $B(0, 2, 0)$, $C_1(0, 0, 2)$, $E(0, 0, 1)$, $A_1(2, 0, 2)$,
 则 $\overrightarrow{BC_1} = (0, -2, 2)$, $\overrightarrow{EA_1} = (2, 0, 1)$, $\overrightarrow{EB} = (0, 2, -1)$,
 设平面 A_1BE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EA_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 2x + z = 0, \\ 2y - z = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 可得 $y = -1$, $z = -2$, 即 $\vec{n} = (1, -1, -2)$,

$$\text{所以} \cos \langle \overrightarrow{BC_1}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{BC_1} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BC_1}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以直线 BC_1 与平面 A_1BE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(3) 假设在棱 CC_1 是存在一点 P , 设 $CP = a$ ($0 < a < 2$), 可得 $P(0, 0, a)$,

由 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, 可得 $\overrightarrow{PA} = (2, 0, -a)$, $\overrightarrow{PB} = (0, 2, -a)$,

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PA} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 2x_1 - az = 0, \\ 2y_1 - az = 0, \end{cases}$$

令 $z = 2$, 可得 $x_1 = a$, $y_1 = a$,

即 $\vec{m} = (a, a, 2)$,

又由平面 A_1BE 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, -1, -2)$,

$$\text{所以} \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-4}{\sqrt{a^2 + a^2 + 4} \cdot \sqrt{6}},$$

因为平面 PAB 与平面 A_1BE 所成二面角为 60° , 可得 $\frac{4}{\sqrt{a^2 + a^2 + 4} \cdot \sqrt{6}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

解得 $a^2 = \frac{10}{3}$, 此时 $a = \frac{\sqrt{30}}{3}$, 符合题意,

所以在棱 CC_1 上存在一点 P , 使得平面 PAB 与平面 A_1BE 所成二面角为 60° , 且 $CP = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

18.

(1) 由题意知 $A_2(a, 0)$, $A_1(-a, 0)$, $B(0, b)$,

则直线 A_1B 的方程为 $y = \frac{b}{a}x + b$, 即 $bx - ay + ab = 0$,

所以点 A_2 到直线 A_1B 的距离 $d = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4\sqrt{7}b}{7}$, 即 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$①

又椭圆 C 过点 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}\right)$, 所以 $\frac{4}{3a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$②

联立①②, 解得 $a^2 = 4$, $b^2 = 3$, 故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由 (1) 知 $A_2(2, 0)$, 直线 l 的方程为 $x = -2$.

由题意知直线 A_2P 的斜率存在且不为 0,

设直线 A_2P 的方程为 $x = my + 2$ ($m \neq 0$),

$$\text{联立} \begin{cases} x = -2, \\ x = my + 2, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = -2, \\ y = -\frac{4}{m}, \end{cases} \quad \text{即} P\left(-2, -\frac{4}{m}\right), Q\left(-2, \frac{4}{m}\right).$$

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 2 (m \neq 0), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \quad \text{消去 } x \text{ 整理得 } (3m^2 + 4)y^2 + 12my = 0,$$

解得 $y = 0$ 或 $y = \frac{-12m}{3m^2 + 4}$.

由点 D 异于点 A_2 可得 $D\left(\frac{-6m^2+8}{3m^2+4}, \frac{-12m}{3m^2+4}\right)$,

所以直线 DQ 的方程为

$$\left(\frac{-12m}{3m^2+4} - \frac{4}{m}\right)(x+2) - \left(\frac{-6m^2+8}{3m^2+4} + 2\right)\left(y - \frac{4}{m}\right) = 0,$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } x_E = \frac{-6m^2+4}{3m^2+2},$$

$$\text{所以 } |A_2E| = \left|2 - \frac{-6m^2+4}{3m^2+2}\right| = \frac{12m^2}{3m^2+2},$$

所以 $\triangle PA_2Q$ 与 $\triangle PEQ$ 的面积之差为 $S_{\triangle PA_2Q} - S_{\triangle PEQ} = 2S_{\triangle PA_2E}$.

$$\text{因为 } 2S_{\triangle PA_2E} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{12m^2}{3m^2+2} \cdot \left|\frac{-4}{m}\right| = \frac{48|m|}{3m^2+2} = \frac{48}{3|m| + \frac{2}{|m|}} \leq 4\sqrt{6},$$

当且仅当 $m = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时取等号.

故当 $\triangle PA_2Q$ 与 $\triangle PEQ$ 的面积之差取得最大值时,

直线 A_2P 的方程为 $3x + \sqrt{6}y - 6 = 0$ 或 $3x - \sqrt{6}y - 6 = 0$.

19.

(1) $S_n = 2a_n - 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - (2a_{n-1} - 1)$, 化为: $a_n = 2a_{n-1}$.

$n = 1$ 时, $a_1 = 2a_1 - 1$, 解得 $a_1 = 1$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比为 2,

所以 $a_n = 2^{n-1}$,

数列 $\{b_n\}$ 满足 $nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

化为: $\frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n} = 1$, 且 $b_1 = 1$,

所以数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 公差为 1, 首项为 $\frac{b_1}{1} = 1$,

所以 $\frac{b_n}{n} = 1 + n - 1 = n$, $b_n = n^2$.

$$c_n = (-1)^{n-1} \frac{4(n+1)}{(3+2\log_2 a_n)(3+2\log_2 a_{n+1})}$$

$$(2) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right),$$

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和

$$T_{2n} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) + \cdots - \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3}$$

$$= \frac{4n}{12n+9}.$$

(3) $d_n = a_n \cdot \sqrt{b_n} = n \cdot 2^{n-1}$,

数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 $D_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$,

$$2D_n = 2 + 2 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n,$$

$$\text{所以 } -D_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n \cdot 2^n,$$

解得 $D_n = (n-1) \cdot 2^n + 1$,

$$S_n = 2a_n - 1 = 2^n - 1,$$

对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $D_n \leq nS_n - a$,

$$\text{所以 } a \leq n(2^n - 1) - (n-1) \cdot 2^n - 1 = 2^n - n - 1,$$

令 $d_n = 2^n - n - 1$, 则 $d_{n+1} - d_n = 2^{n+1} - (n+1) - 1 - (2^n - n - 1) = 2^n - 1 > 0$,

所以数列 $\{d_n\}$ 单调递增,

所以 $a \leq (d_n)_{\min} = d_1 = 0$,

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

20.

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

令 $f'(x) > 0$, 解得: $0 < x < e$,

令 $f'(x) < 0$, 解得: $x > e$,

所以当 $x \in (0, e)$, $f(x)$ 为增函数, 当 $x \in (e, +\infty)$, $f(x)$ 为减函数,

所以 $x = e$ 时, $f(x)$ 有极大值 $f(e) = \frac{1}{e} + b = \frac{1+e}{e}$,

所以 $b = 1$.

(2) (2) 【解法一】

由 (1) 知, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 1$,

则 $g(x) \geq af(x)$, 即 $e^x - \frac{a}{x} \geq \frac{a \ln x}{x} + a$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

所以 $xe^x - a \geq a \ln x + ax$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

即 $xe^x - a \ln x - ax - a \geq 0$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

设 $h(x) = xe^x - a \ln x - ax - a$, 则 $h(x) \geq 0$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

(i) 若 $a < 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时,

$$h(x) = xe^x - a \ln x - ax - a < e - a \ln x - 2a,$$

则 $h(e^{\frac{a}{a-2}}) < e - a \ln e^{\frac{a}{a-2}} - 2a = 0$, 不合题意;

(ii) 若 $a = 0$, 则 $h(x) = xe^x \geq 0$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 符合题意;

(iii) 若 $a > 0$, 则 $h'(x) = (x+1)e^x - \frac{a}{x} - a = (x+1)\left(e^x - \frac{a}{x}\right)$,

设 $\varphi(x) = e^x - \frac{a}{x}$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

因为 $\varphi(a) = e^a - 1 > 0$, $\varphi\left(\frac{a}{a+3}\right) = e^{\frac{a}{a+3}} - a - 3 < 0$,

所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{a}{a+3}, a\right)$, 使 $\varphi(x_0) = e^{x_0} - \frac{a}{x_0} = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\varphi(x) < 0$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 为减函数;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $\varphi(x) > 0$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数;

所以 $h(x) \geq h(x_0) = x_0 e^{x_0} - a \ln x_0 - ax_0 - a$,

因为 $e^{x_0} - \frac{a}{x_0} = 0$,

所以 $e^{x_0} = \frac{a}{x_0}$, $\ln x_0 = \ln a - x_0$,

所以 $h(x_0) = x_0 \frac{a}{x_0} - a(\ln a - x_0) - ax_0 - a = -a \ln a$,

则 $-a \ln a \geq 0$, 即 $\ln a \leq 0$, 即 $0 < a \leq 1$;

综上 $0 \leq a \leq 1$.

【解法二】

由 (1) 知, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 1$,

则 $g(x) \geq af(x)$, 即 $e^x - \frac{a}{x} \geq \frac{a \ln x}{x} + a$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

所以 $xe^x - a \geq a \ln x + ax$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

即 $a(1 + x + \ln x) \leq xe^x$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

设 $h(x) = 1 + x + \ln x$,

因为 $h(x) = 1 + x + \ln x$ 为单调递增函数, 且 $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} > 0$, $h\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0$,

所以 $\exists x_1 \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$, 使得 $h(x_1) = 1 + x_1 + \ln x_1 = 0$,

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $h(x) < 0$, 当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$,

①当 $x = x_1$ 时, $1 + x + \ln x = 0$ 时, $0 \leq xe^x$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

所以 $a \in \mathbf{R}$;

当 $x \neq x_1$ 时, 即 $1 + x + \ln x \neq 0$ 时, 设 $\varphi(x) = \frac{xe^x}{1 + x + \ln x}$,

则

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{(x+1)e^x(1+x+\ln x) - xe^x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(1+x+\ln x)^2} \\ &= \frac{(x+1)e^x(1+x+\ln x) - e^x(x+1)}{(1+x+\ln x)^2} \\ &= \frac{(x+1)e^x(\ln x + x)}{(1+x+\ln x)^2}.\end{aligned}$$

设 $p(x) = \ln x + x$,

因为 $p(x) = \ln x + x$ 为单调递增函数, 且 $p\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, $p(1) = 1 > 0$,

所以 $\exists x_2 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使得 $p(x_2) = \ln x_2 + x_2 = 0$,

当 $x \in (0, x_2)$ 时, $p(x) < 0$, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 是减函数,

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $p(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 是增函数,

所以 $\varphi(x)_{\min} = \varphi(x_2) = \frac{x_2 e^{x_2}}{1+x_2+\ln x_2} = x_2 e^{x_2}$,

又因为 $\ln x_2 + x_2 = 0$,

所以 $x_2 e^{x_2} = e^{x_2 + \ln x_2} = e^0 = 1$,

所以 $\varphi(x)_{\min} = \varphi(x_2) = 1$,

② 当 $1+x+\ln x > 0$ 时, $a \leq \frac{xe^x}{1+x+\ln x}$ 对 $\forall x \in (x_1, +\infty)$ 恒成立,

因为 $\varphi(x)$ 在 (x_1, x_2) 上是减函数, 在 $(x_2, +\infty)$ 上是增函数,

所以 $a \leq \varphi(x_2) = 1$;

③ 当 $1+x+\ln x < 0$ 时, $a \geq \frac{xe^x}{1+x+\ln x}$ 对 $\forall x \in (0, x_1)$ 恒成立,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上是减函数,

因为 $\varphi(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{1+x+\ln x}$,

所以 $a \geq \varphi(0) = 0$;

综上 $0 \leq a \leq 1$.

【解法三】

由 (1) 知, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 1$,

则 $g(x) \geq af(x)$, 即 $e^x - \frac{a}{x} \geq \frac{a \ln x}{x} + a$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

所以 $xe^x - a \geq a \ln x + ax$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

即 $xe^x - a \ln x - ax - a \geq 0$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

设 $h(x) = xe^x - a \ln x - ax - a$, 则 $h(x) \geq 0$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

$h(x) = e^{\ln x} x^x - a \ln x - ax - a = e^{\ln x + x} - a(\ln x + x) - a$,

设 $\ln x + x = t$, $t \in \mathbf{R}$,

原问题转化为: $\varphi(t) = e^t - at - a \geq 0$ 对 $\forall t \in \mathbf{R}$ 恒成立,

(i) 若 $a < 0$, 当 $t \in (-\infty, 0)$ 时,

$\varphi(t) = e^t - at - a < 1 - at - a$,

则 $h\left(\frac{1}{a} - 1\right) < 1 - a\left(\frac{1}{a} - 1\right) - a = 0$, 不合题意;

(ii) 若 $a = 0$, 则 $\varphi(t) = e^t \geq 0$ 对 $\forall t \in \mathbf{R}$ 恒成立, 符合题意;

(iii) 若 $a > 0$, 则 $\varphi'(t) = e^t - a$,

令 $\varphi'(t) > 0$, $t > \ln a$, 令 $\varphi'(t) < 0$, $t < \ln a$,

所以当 $t \in (-\infty, \ln a)$ 时, $\varphi(t)$ 为减函数,

当 $t \in (\ln a, +\infty)$ 时, $\varphi(t)$ 为增函数,

所以 $\varphi(t) \geq \varphi(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a - a = -a \ln a \geq 0$,

即 $\ln a \leq 0$, 即 $0 < a \leq 1$;

综上 $0 \leq a \leq 1$.

(3) 要证 $x^2 f(x) > a \sin x + x^2 - 1$,

只需证 $x^2 \left(\frac{\ln x}{x} + 1\right) > a \sin x + x^2 - 1$,

即 $x \ln x + x^2 > a \sin x + x^2 - 1$, 即 $x \ln x + 1 > a \sin x$,

只需证 $\ln x + \frac{1}{x} > \frac{a \sin x}{x}$,

设 $F(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $G(x) = x - \sin x$,

因为 $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$,

所以 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $F(x) \geq F(1) = 1$.

因为 $G'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 恒成立,

所以 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $G(x) > G(0) = 0$, 则 $x > \sin x$, 即 $\frac{\sin x}{x} < 1$,

由 (2) 可知, $0 \leq a \leq 1$, 所以 $\frac{a \sin x}{x} < 1$;

所以 $F(x) > \frac{a \sin x}{x}$, 即 $\ln x + \frac{1}{x} > \frac{a \sin x}{x}$, 得证.