

理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. $\sin \frac{2\,021\pi}{3} =$

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设集合 $A = \{x | y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}\}$, $B = \{x | 2^x > \frac{1}{2}\}$, 则 $A \cap B =$

A. $[-3, -1)$

B. $[-3, 1)$

C. $(-1, 1)$

D. $(-1, 1]$

3. 已知公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 6$, a_3 是 a_1, a_9 的等比中项, 则 $\{a_n\}$ 的前 5 项之和 $S_5 =$

A. 30

B. 45

C. 63

D. 84

4. 函数 $f(x) = x^2 + \ln x - 2$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为

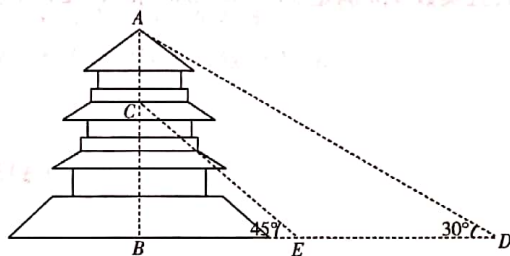
A. $y = 3x - 4$

B. $y = 2x - 3$

C. $y = -2x + 1$

D. $y = -3x + 2$

5. “欲穷千里目,更上一层楼”出自唐朝诗人王之涣的《登鹤雀楼》,鹤雀楼位于今山西永济市,该楼有三层,前对中条山,下临黄河,传说常有鹤雀在此停留,故有此名.下面是复建的鹤雀楼的示意图,某位游客(身高忽略不计)从地面 D 点看楼顶点 A 的仰角为 30° ,沿直线前进 79 米到达 E 点,此时看点 C 的仰角为 45° ,若 $BC = 2AC$,则楼高 AB 约为



A. 65 米

B. 74 米

C. 83 米

D. 92 米

6. “ $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ”是“ $\log_{0.2} a > \log_{0.2} b$ ”的

A. 充要条件

B. 既不充分也不必要条件

C. 充分不必要条件

D. 必要不充分条件



7. 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $CD = 1$, $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} = \mathbf{0}$, E 是 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} =$

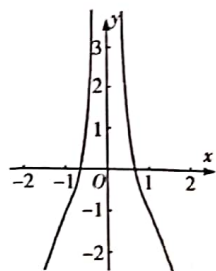
A. $\frac{3}{2}$

B. 2

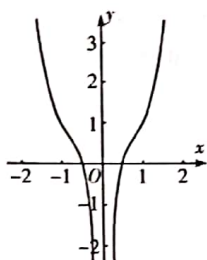
C. 3

D. 4

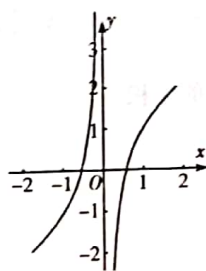
8. 函数 $f(x) = x^2 + \frac{\ln|x|}{2x^2}$ 的图象大致为



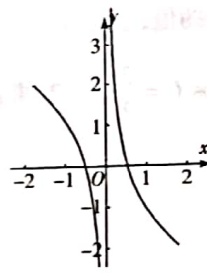
A



B



C



D

9. 若 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos 2\alpha + \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) = 0$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 0

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 0

10. 若 a, b 为正实数, 且 $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} = 1$, 则 $a+b$ 的最小值为

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. 2

D. 4

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $\forall x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(x) + f(x+2) = 0$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = 2^x + 1$, 则 $f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2021) =$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

12. 设函数 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的导函数, 若对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $xf'(x) + 2f(x) < 0$, 则函数 $g(x) = f(x) - \frac{2}{x^2}$ 的零点个数为

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \\ x - 2y - 2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x - y$ 的最大值为_____.

14. 已知向量 $a = (1, 3)$, $|a - b| = \sqrt{13}$, $a \cdot b = 1$, 则 $|b| =$ _____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 2$, 则数列 $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n =$ _____.

16. 若函数 $f(x)$ 在定义域 D 内满足: 对任意的 $x_1, x_2, x_3 \in D$ 且 $x_1 + x_2 > x_3$, 有 $f(x_1) + f(x_2) > f(x_3)$, 则称函数 $f(x)$ 为“类单调递增函数”. 下列函数是“类单调递增函数”的有_____ (填写所有满足题意的函数序号).

① $f(x) = \sqrt{x}$; ② $f(x) = x^2$; ③ $f(x) = \ln x$; ④ $f(x) = \sin x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.



三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c(\cos B - 2\cos A) = (2a - b)\cos C$.

(I) 求 $\frac{a}{b}$ 的值;

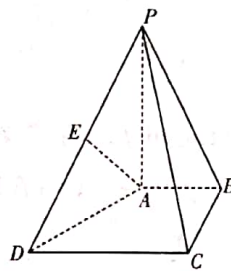
(II) 若 $\cos C = \frac{3}{4}$, $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, $CD = 2AB$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 PD 的中点.

(I) 证明: $AE \parallel$ 平面 PBC ;

(II) 若 $PA = CD = 2BC$, 求二面角 $A-PD-C$ 的余弦值.



19. (12 分)

2020 年全球暴发新冠肺炎疫情, 其最大特点是人传人, 传播快, 病亡率高. 通过佩戴口罩可以有效地降低病毒传染率. 在某高风险地区, 公共场合未戴口罩被感染的概率是 $\frac{1}{2}$, 戴口罩被感染的概率是 $\frac{1}{10}$, 现有在公共场合活动的甲、乙、丙、丁、戊 5 个人, 每个人是否被感染相互独立.

(I) 若他们都未戴口罩, 求其中恰有 3 人被感染的概率.

(II) 若他们中有 3 人戴口罩, 设 5 人中被感染的人数为 X , 求:

(i) $P(X=2)$;

(ii) $E(X)$.

附: 对于两个随机变量 ξ, η , 有 $E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta)$.



20. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4, 上顶点为 A , 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且 $\angle F_1AF_2 =$

60° , O 为坐标原点.

(I) 求椭圆 C 的方程.

(II) 设点 M, N 为椭圆 C 上的两个动点, 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$, 问: 点 O 到直线 MN 的距离 d 是否为定值? 若是, 求出 d 的值; 若不是, 请说明理由.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2\ln x - ax (a \in \mathbf{R})$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若函数 $g(x) = f(x) + x^2$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且 $g(x_1) - mx_2 > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

已知在极坐标系中, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta) = 2\sqrt{3} + 2$. 以极点为平面直角坐标系的原点, 极轴为 x 轴的正半轴, 建立平面直角坐标系, 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3(1 + \cos t) \\ y = -2 + 3\sin t \end{cases} (t \text{ 为参数})$.

(I) 求曲线 C_1 的直角坐标方程和 C_2 的普通方程;

(II) 设曲线 C_1 与曲线 C_2 相交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |2x - 1| + |x + 2|$.

(I) 求不等式 $f(x) > 4$ 的解集;

(II) 若 $f(x)$ 的最小值为 m , 且实数 a, b 满足 $3a - 4b = 2m$, 求 $(a - 2)^2 + (b + 1)^2$ 的最小值.

