

# 成都七中高 2021 届高三下入学考试数学试题（理科）

（时间：120 分钟 试卷满分：150 分）

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第 I 卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的）

1. 集合  $P = \{3, \log_2 a\}$ ， $Q = \{a, b\}$ ，若  $P \cap Q = \{0\}$ ，则  $P \cup Q =$

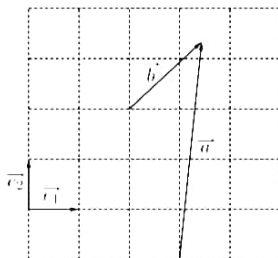
- A.  $\{0, 3\}$       B.  $\{0, 1, 3\}$       C.  $\{0, 2, 3\}$       D.  $\{0, 1, 2, 3\}$

2. 若复数  $z = \frac{2}{1 + \sqrt{3}i}$ ，则  $|z| =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C. 1      D. 2

3. 如图，向量  $\vec{b} - \vec{a}$  等于 ( )

- A.  $\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$     B.  $-4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$   
C.  $-2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$     D.  $-\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$



4. 命题  $p$ : 若  $\alpha$  为第一象限角，则  $\sin \alpha < \alpha$ ；命题  $q$ : 函数  $f(x) = 2^x - x^2$  有两个零点，则 ( )

- A.  $p \wedge q$  为真命题    B.  $p \vee q$  为真命题    C.  $\neg p \vee \neg q$  为真命题    D.  $\neg p \wedge q$  为真命题

5. 等比数列  $\{a_n\}$  中  $a_1 = 1$ ，且  $4a_1, 2a_2, a_3$  成等差数列，则  $\frac{a_n}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{16}{25}$       B.  $\frac{4}{9}$       C.  $\frac{1}{2}$       D. 1

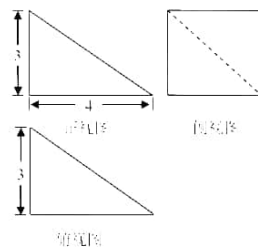
6. 设  $a = \sin \frac{\pi}{5}$ ， $b = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ ， $c = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ ，则 ( )

- A.  $a < c < b$       B.  $b < a < c$       C.  $c < a < b$       D.  $c < b < a$



7. 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的体积是 ( )

- A. 6                      B. 12  
C. 24                      D. 36



8. 中国的 5G 技术领先世界, 5G 技术的数学原理之一便是著名的香农公式:

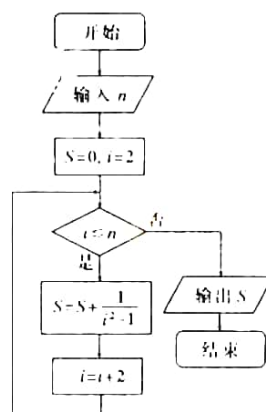
$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$ . 它表示: 在受噪声干扰的信道中, 最大信息传递速度  $C$  取决于信

道带宽  $W$ , 信道内信号的平均功率  $S$ , 信道内部的高斯噪声功率  $N$  的大小, 其中  $\frac{S}{N}$  叫做信噪比. 当信噪比较大时, 公式中真数中的 1 可以忽略不计. 按照香农公式, 若不改变带宽  $W$ , 而将信噪比  $\frac{S}{N}$  从 1000 提升至 4000, 则  $C$  大约增加了 ( ) 附:  $\lg 2 \approx 0.3010$

- A. 10%                      B. 20%                      C. 50%                      D. 100%

9. 执行如图所示的程序框图, 若输入的  $n=10$ , 则输出的  $S = ( )$ .

- A.  $\frac{4}{9}$                       B.  $\frac{8}{9}$   
C.  $\frac{5}{11}$                       D.  $\frac{10}{11}$



10. 将 5 位同学分别保送到北京大学, 上海交通大学, 中山大学这 3 所大学就读, 每所大学至少保送 1 人, 则不同的保送方法共有 ( )

- A. 150 种      B. 180 种      C. 240 种      D. 540 种

11. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ,  $A_1, A_2$  是实轴顶点,  $F$  是右焦点,  $B(0, b)$  是虚轴端点, 若在线段  $BF$  上 (不含端点) 存在不同的两点  $P_i (i=1, 2)$ , 使得  $\triangle P_i A_1 A_2 (i=1, 2)$  构成以  $A_1 A_2$  为斜边的直角三角形, 则双曲线离心率  $e$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left( \sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}+1}{2} \right)$       B.  $\left( \sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$       C.  $\left( 1, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$       D.  $\left( \frac{\sqrt{5}+1}{2}, +\infty \right)$

12. 已知函数  $f(x) = \ln(|x| - 1) + e^x + e^{-x}$ , 则使不等式  $f(x+1) < f(2x)$  成立的  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$       B.  $(-2, -1)$       C.  $\left( -\infty, -\frac{1}{3} \right) \cup (1, +\infty)$       D.  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$



## 第 II 卷

二、填空题：(本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.)

13. 若二项式  $(1+2x)^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 的展开式中所有项的系数和为 243,

则该二项式展开式中含有  $x^3$  项的系数为\_\_\_\_\_.

14. 若实数  $x, y$  满足条件  $\begin{cases} y \geq x \\ x + y \leq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$ , 则  $z = 2x - y$  的最大值是\_\_\_\_\_.

15. 在棱长为  $\sqrt{2}$  的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 棱  $BB_1$ ,  $B_1C_1$  的中点分别为  $E$ ,  $F$ , 点  $P$  在平面  $BCC_1B_1$  内, 作  $PQ \perp$  平面  $ACD_1$ , 垂足为  $Q$ . 当点  $P$  在  $\triangle EFB_1$  内 (包含边界) 运动时, 点  $Q$  的轨迹所组成的图形的面积等于\_\_\_\_\_.

16. 已知  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x} - \ln x$ ,  $f(x)$  在  $x = x_0$  处取最大值. 以下各式正确的序号为\_\_\_\_\_.

①  $f(x_0) < x_0$     ②  $f(x_0) = x_0$     ③  $f(x_0) > x_0$     ④  $f(x_0) < \frac{1}{9}$     ⑤  $f(x_0) > \frac{1}{9}$

三、解答题：本大题共 7 小题，共 70 分，解答须写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A$ ,  $B$ ,  $C$  所对的边分别是  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , 且  $c \sin 2B = \sqrt{3} b \sin C$ .

(1) 若  $\cos 2A + 3 \cos A - 2 \sin B = 0$ , 求角  $A$  的大小;

(2) 若  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $b = 2$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. 已知某种动物服用某种药物一次后当天出现 A 症状的概率为  $\frac{1}{3}$ . 为了研究连续服用该

药物后出现 A 症状的情况, 做药物试验. 试验设计为每天用药一次, 连续用药四天为一个用

药周期. 假设每次用药后当天是否出现 A 症状的出现与上次用药无关.

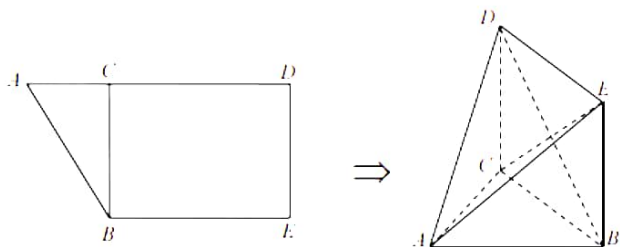
(I) 如果出现 A 症状即停止试验”, 求试验至多持续一个用药周期的概率;

(II) 如果在一个用药周期内出现 3 次或 4 次 A 症状, 则这个用药周期结束后终止试验, 试验至多持续两个周期. 设

药物试验持续的用药周期数为  $\eta$ , 求  $\eta$  的期望.

19. 如图, 在直角梯形  $ABED$  中,  $BE \parallel AD$ ,  $DE \perp AD$ ,  $BC \perp AD$ ,  $AB = 4$ ,  $BE = 2\sqrt{3}$ . 将矩形  $BEDC$  沿  $BC$  翻折, 使得平面  $ABC \perp$  平面  $BCDE$ .





(1) 若  $BC = BE$ , 证明: 平面  $ABD \perp$  平面  $ACE$ ;

(2) 当三棱锥  $A-BCE$  的体积最大时, 求平面  $ADE$  与平面  $ABC$  所成的锐二面角的余弦值.

20. 已知过点  $P(1, \frac{3}{2})$  的曲线  $C$  的方程为  $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2a$ .

(I) 求曲线  $C$  的标准方程;

(II) 已知点  $F(1, 0)$ ,  $A$  为直线  $x=4$  上任意一点, 过  $F$  作  $AF$  的垂线交曲线  $C$  于点  $B, D$ .

(i) 证明:  $OA$  平分线段  $BD$  (其中  $O$  为坐标原点);

(ii) 求  $\frac{|BD|}{|AF|}$  最大值.

21. 已知函数  $f(x) = 2\sin x - x^2 + 2\pi x - a$ .

(I) 当  $a=0$  时, 求  $f(x)$  零点处的切线方程;

(II) 若  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 求证:  $\frac{1-\pi^2}{\pi}(x_2 - x_1 - 2\pi) \geq a$ .

请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分, 作答时请写清楚题号.

22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数). 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为

极轴, 建立极坐标系, 直线  $l_2$  的极坐标方程为  $2\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$ ,  $l_2$  交极轴于点  $A$ , 交直线  $l_1$  于点  $B$ .

(1) 求  $A, B$  点的极坐标方程;

(2) 若点  $P$  为椭圆  $\frac{y^2}{3} + x^2 = 1$  上的一个动点, 求  $\triangle PAB$  面积的最大值及取最大值时点  $P$  的直角坐标.

23. 已知函数  $f(x) = |x-2|$ .

(1) 解不等式  $f(x) - f(2x+4) < 2$ ;

(2) 若  $f(x-1) + f(x+3) \geq m^2 + 3m$  对所有的  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

