

成都市 2019 级高中毕业班摸底测试

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. B; 2. C; 3. B; 4. D; 5. A; 6. A; 7. C; 8. B; 9. C; 10. C; 11. A; 12. D.

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\sqrt{5}$; 14. $\frac{3}{5}$; 15. 0.44; 16. ①④.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由已知,可得 $f'(x)=x^2+ax-2$1 分

∵函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x+y-1=0$ 平行,
 $\therefore f'(1)=a-1=-2$3 分

$\therefore a=-1$.
 经验证, $a=-1$ 符合题意.4 分

(II)由(I)得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{6}$.
 $\therefore f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$5 分

当 x 变化时, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增 ↗	极大值 2	单调递减 ↘	极小值 $-\frac{5}{2}$	单调递增 ↗

.....10 分

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 2; 当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $-\frac{5}{2}$12 分

18. 解:(I)∵第三组的频率为 $1-(0.020+0.025+0.030+0.035+0.050)\times 5=0.200$,
2 分

$\therefore a=\frac{0.200}{5}=0.040$3 分

又第一组的频率为 $0.025\times 5=0.125$, 第二组的频率为 $0.035\times 5=0.175$,
 第三组的频率为 0.200.

∵前三组的频率之和为 $0.125+0.175+0.200=0.500$,4 分

$\therefore$ 这 300 名业主评分的中位数为 85.5 分

(II)由频率分布直方图,知评分在 $[90, 95)$ 的人数与评分在 $[95, 100]$ 的人数的比值为 3:2.

$\therefore$ 采用分层抽样法抽取 5 人,评分在 $[90, 95)$ 的有 3 人,评分在 $[95, 100]$ 有 2 人.
7 分

不妨设评分在 $[90, 95)$ 的 3 人分别为 A_1, A_2, A_3 ; 评分在 $[95, 100]$ 的 2 人分别为 B_1, B_2 .

则从 5 人中任选 2 人的所有可能情况有：

$\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, B_1\}, \{A_1, B_2\}, \{A_2, A_3\}, \{A_2, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \{A_3, B_1\}, \{A_3, B_2\}, \{B_1, B_2\}$. 共 10 种.10 分

其中选取的 2 人中至少有 1 人的评分在 $[95, 100]$ 的情况有：

$\{A_1, B_1\}, \{A_1, B_2\}, \{A_2, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \{A_3, B_1\}, \{A_3, B_2\}, \{B_1, B_2\}$. 共 7 种.11 分

故这 2 人中至少有 1 人的评分在 $[95, 100]$ 的概率为

$$P = \frac{7}{10}. \quad \text{.....12 分}$$

19. 解：(I) 如图，取 PB 中点 H ，连接 EH, HC 。

在 $\triangle PAB$ 中， $\because E$ 为 AP 的中点， H 为 PB 的中点，

$\therefore EH$ 为 $\triangle PAB$ 的中位线。

$$\therefore EH \parallel AB, EH = \frac{1}{2}AB. \quad \text{.....1 分}$$

$$\text{又 } DC \parallel AB, DC = \frac{1}{2}AB,$$

$\therefore EH \parallel DC$ 且 $EH = DC$ 。

$\therefore$ 四边形 $CDEH$ 为平行四边形。 $\therefore DE \parallel CH$3 分

又 $DE \not\subset$ 平面 $PBC, CH \subset$ 平面 PBC ,4 分

$\therefore DE \parallel$ 平面 PBC5 分

(II) 如图，连接 BD 。 $\because DC \parallel AB, BC \perp AB, \therefore BC \perp DC$ 。

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $\because DC = BC = 2$,

$$\therefore BD = \sqrt{DC^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}.$$

在直角梯形 $ABCD$ 中，易得 $AD = 2\sqrt{2}$ 。

在 $\triangle ABD$ 中， $\because AD = 2\sqrt{2}, AB = 4$,

$$\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2. \therefore BD \perp AD.$$

取 AD 中点 O ，连接 PO 。

$\because PA = PD, \therefore PO \perp AD$ 。

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD, PO \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$ 。

取 AB 中点 N 。 $\therefore ON \parallel BD, ON \perp AD$ 。则 PO, AD, ON 两两垂直。

以 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴， y 轴， z 轴的正方向，建立如

图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$7 分

则 $A(\sqrt{2}, 0, 0), D(-\sqrt{2}, 0, 0), B(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), P(0, 0, \sqrt{2}), M(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$;

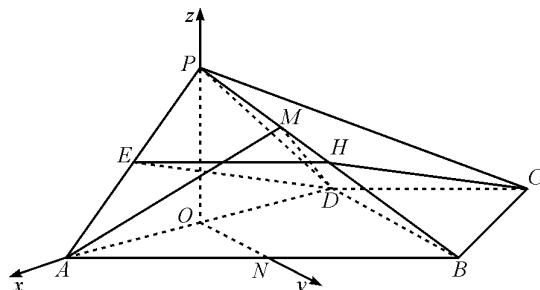
$$\overrightarrow{AM} = (-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}), \overrightarrow{DM} = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}).$$

设平面 ADM 的一个法向量 $m = (x, y, z)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{DM} \cdot m = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases} \text{ 化简得 } \begin{cases} x = 0, \\ y = -z. \end{cases}$$

令 $z = 1$ ，得 $m = (0, -1, 1)$9 分

又平面 ABD 的一个法向量 $n = (0, 0, 1)$10 分



$$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{二面角 } M-AD-B \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (I) $\because P$ 在椭圆 C 上, $|PF_1| = 2, \therefore |PF_2| = 2a - 2$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $4c^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos \angle F_1PF_2$,

$$\text{即 } 4c^2 = 4 + (2a - 2)^2 - 4(2a - 2)\cos \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{化简, 得 } c^2 = a^2 - 3a + 3. \dots\dots ① \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又椭圆 } C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \therefore a = 2c. \dots\dots ② \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由 } ①②, \text{ 解得 } c = 1, a = 2. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3.$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } (4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \Delta = 16(12k^2 - 3m^2 + 9) > 0, \therefore 4k^2 + 3 > m^2.$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-8km}{4k^2 + 3}, x_1x_2 = \frac{4m^2 - 12}{4k^2 + 3}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{4\sqrt{12k^2 - 3m^2 + 9}}{4k^2 + 3}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{坐标原点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}} \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{4\sqrt{12k^2 - 3m^2 + 9}}{4k^2 + 3} \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{|m|\sqrt{4k^2 + 3 - m^2}}{4k^2 + 3} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{(4k^2 + 3 - m^2) \cdot m^2}}{4k^2 + 3} \\ &\leq 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{4k^2 + 3} = \sqrt{3}. \end{aligned} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当且仅当 } 4k^2 + 3 - m^2 = m^2, \text{ 即 } 4k^2 + 3 = 2m^2 \text{ 时, 等号成立.} \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{满足 } 4k^2 + 3 = 2m^2 > m^2.$$

$$\therefore \triangle OAB \text{ 面积的最大值为 } \sqrt{3}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2ax - 1}{x}$. $\dots\dots 1 \text{ 分}$

① 当 $a \leq 0$ 时, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无单调递增区间; $\dots\dots 2 \text{ 分}$

② 当 $a > 0$ 时, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{2a}$.

$\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{1}{2a})$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{2a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递增. $\dots\dots 3 \text{ 分}$

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无单调递增区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递增.4 分

(II) $f(x) = 2ax - \ln x, x > 0$.

$\because x_1, x_2 (0 < x_1 < x_2)$ 满足 $f(x_1) = f(x_2)$,

$\therefore 2ax_1 - \ln x_1 = 2ax_2 - \ln x_2$, 即 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = 2a$5 分

欲证 $f(2ax_1) + f(2ax_2) > 4a^2(x_1 + x_2)$, 即证 $\ln(2ax_1) + \ln(2ax_2) < 0$,

即证 $x_1 x_2 < \frac{1}{4a^2}$, 又 $a > 0, 0 < x_1 < x_2$, 即证 $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{1}{2a}$.

亦证 $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}$, 即 $\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 0$,

即证 $2\ln \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > 0$7 分

$\because 0 < x_1 < x_2$, 设 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = t (0 < t < 1)$, 即证 $2\ln t + \frac{1}{t} - t > 0$8 分

设 $h(t) = 2\ln t + \frac{1}{t} - t (0 < t < 1)$.

$\because h'(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} - 1 = \frac{-(t-1)^2}{t^2} < 0$ 在 $t \in (0, 1)$ 上恒成立,9 分

$\therefore h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $\therefore h(t) > h(1) = 0$10 分

$\therefore 2\ln t + \frac{1}{t} - t > 0$11 分

即 $f(2ax_1) + f(2ax_2) > 4a^2(x_1 + x_2)$ 成立.12 分

22. 解: (I) 由曲线 C 的参数方程, 消去参数 α , 得曲线 C 的普通方程为

$x^2 + y^2 = 1$2 分

$\because \rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y$, $\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为

$\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$4 分

(II) 设曲线 C 上任一点 (x, y) 经坐标变换后对应的点为 (x', y') .

据题意, 得 $\begin{cases} x' = \sqrt{3}x, \\ y' = y. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}x', \\ y = y'. \end{cases}$

$\therefore x^2 + y^2 = 1, \therefore \frac{x'^2}{3} + y'^2 = 1$.

即曲线 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$6 分

$\because$ 直线 l 过定点 $P(-1, 0)$,

$\therefore$ 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}).$ 7 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C_1 的普通方程, 整理可得

$5t^2 - 2t - 4 = 0$(*)

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times (-4) = 84 > 0$.

设 t_1, t_2 为方程(*)的两个实数根. 则 $t_1 + t_2 = \frac{2}{5}, t_1 t_2 = -\frac{4}{5} < 0$8 分

$\therefore |PM| + |PN| = |t_1| + |t_2| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$10 分