成都七中高 2021 届三诊模拟考试（理科数学参考答案）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

B、A、C、A、D、B、C、A、A、C、D、C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡上.

-10． ± 2． $\frac{3}{4}$． $(\frac{8}{3},\frac{11}{4})$．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．解：（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则由已知得 $(2+2d)^2=2(2+8d)\Rightarrow d=2$ 或 $d=0$（舍去）

所以 $a_n=2n$． ……………………………………………………………5 分

（Ⅱ）$\because \frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n-1}}=2n$，

$\therefore \frac{1}{b_{n-1}}-\frac{1}{b_{n-2}}=2(n-1)$， $\cdots \frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_1}=2\times 2$，

即 $\therefore \frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_1}=n^2+n-2$．解得 $b_n=\frac{1}{n^2+n}$，

即 $\therefore S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$． ……………………………………………………12 分

18． 解：（Ⅰ）由条形图可知未患有 A 疾病的男性为 40 人，女性 25 人，

由男女比例为 3:2 可知 100 个样本中，男性有 60 人，女性有 40 人，所以 2×2 列联表如下：

	男性	女性	合计
患有 A 疾病	20	15	35
未患 A 疾病	40	25	65
合计	60	40	100

$\therefore K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100(500-600)^2}{60\times 40\times 35\times 65}\approx 0.18< 2.706$，

所以没有 90% 的把握认为患 A 疾病与性别有关．…………………6 分

（Ⅱ）设打了预苗后，针对 A 疾病的花费为 X 元，没有打预苗，针对 A 疾病的花费为 Y 元，

则 X 的分布列为：

X	200	1000
P	$\frac{95}{100}$	$\frac{5}{100}$

所以 $EX=2\times 95+50=240$ 元，

则 Y 的分布列为：

Y	0	800
P	$\frac{65}{100}$	$\frac{35}{100}$

所以 $EY=8\times 35=280$ 元，

$\because EX<EY$ 元，所以从经济的角度应该为该养老院的老人打该疾病的预苗．…………………12 分

19． 解：（Ⅰ）∵AA_1⊥面 ABC，D 是棱 AB 的中点，

∴ 直线 C_1D⊥平面 ADE，

∴ C_1D⊥AD，又 AD⊥EC_1，

∴ AD⊥平面 DEC_1，

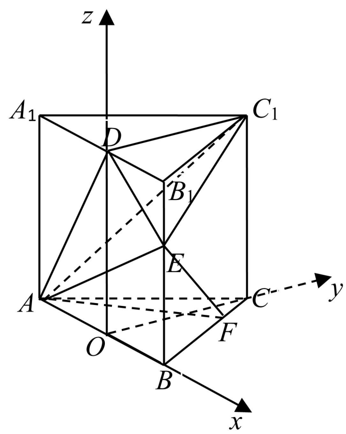
∴ AD⊥DE，可得且 $BE=2EB_1$，

在 AB 上取点 G，使 $BG=\frac{1}{3}BA$，连接 EG，所以 EG∥ 平面 ADC_1，

在 BC 上取点 F，使 $BF=\frac{2}{3}BC$，连 EGF，所以 GF∥ 平面 ADC_1，

∴ 平面以 EGF∥ 平面 ADC_1，即 EF∥ 平面 ADC_1，

∴ $BF=\frac{2\sqrt{2}}{3}$． ………………….6 分



（Ⅱ）取 AB 的中点 O，分别以 OB,OC,OD 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图，

则 $A(-1,0,0),E(1,0,\frac{2\sqrt{3}}{3}),F(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0),D(0,0,\sqrt{3})$，

设平面 AEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AE}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AF}\end{cases}$，得 $\begin{cases}\sqrt{3}x+z=0\\ 2x+y=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,-2,-\sqrt{3})$，

取平面 DEC_1 的法向量 $\overrightarrow{AD}=(1,0,\sqrt{3})$，

∴ $\cos<\vec{n},\overrightarrow{AD}>=\frac{1-3}{4\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以平面 DEC_1 与平面 AEF 的所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$． ………………….12 分

20. 解：（Ⅰ）由已知得 $a=2$，由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $a=\sqrt{2}b$，即 $b=\sqrt{2}$．

所以该椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$． …………………………………………..4 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，AB 中点为 $N(x_0,y_0)$

联立解：$\begin{cases}y=x+m\\ x^2+2y^2=4\end{cases}$ 得 $3x^2+4mx+2m^2-4=0$．

由 $\Delta>0$ 得 $m^2<6$，

∴ $x_0=-\frac{2m}{3},y_0=\frac{m}{3}$，$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{4\sqrt{6-m^2}}{3}$，……………………..6 分

所以直线 CD 的方程为 $y=-x-\frac{m}{3}$，

联立解：$\begin{cases} y=-x-\dfrac{m}{3} \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 得 $3x^2+\dfrac{4m}{3}x+\dfrac{2m^2}{9}-4=0$．

$\therefore x_M=-\dfrac{2m}{9}, y_M=-\dfrac{m}{9}$，$\therefore |MN|=|\dfrac{4\sqrt{2}m}{9}|$ ……………………………………………8 分

由 $\cos\angle AMB=-\dfrac{5}{13}$，知 $\cos\angle AMN=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\therefore \tan\angle AMB=\dfrac{|AB|}{2|MN|}=\dfrac{3}{2}$，…………………10 分

$\therefore \dfrac{4\sqrt{6-m^2}}{3}=3|\dfrac{4\sqrt{2}m}{9}|$，解得 $m=\pm\sqrt{2}$． ……………………………………………12 分

21．解：（Ⅰ）$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{m}{x}=\dfrac{x^2-mx+1}{x^2}$，

据题意得方程 $x^2-mx+1=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无根或有唯一根，

即方程 $m=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无根或有唯一根，解得 $m\le 2$，…………………3 分

（Ⅱ）当 $m=2$ 时，$f(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$，$g(x)=x+\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2$，

由（Ⅰ）知 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(1)=0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x<f(1)=0$，得 $x-\dfrac{1}{x}<2\ln x<0$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x>f(1)=0$，得 $x-\dfrac{1}{x}>2\ln x>0$，

所以当 $x>0$ 时，$|x-\dfrac{1}{x}|\ge|2\ln x|=|\ln x^2|$，

令 $x^2=u>0$，所以 $|\sqrt{u}-\dfrac{1}{\sqrt{u}}|\ge|\ln u|$，平方的得 $u+\dfrac{1}{u}-2\ge(\ln u)^2$，

即当 $u>0$ 时，不等式 $u+\dfrac{1}{u}-(\ln u)^2\ge 2$ 成立，当 $u=1$ 时取等号，

所以当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 取最小值 2.　　　　　　…………………7 分

（Ⅲ）由 $\Leftrightarrow (n-a)\ln(1+\dfrac{1}{n})\le 1 \Leftrightarrow n-a\le\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} \Leftrightarrow a\le n-\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$，令 $t=1+\dfrac{1}{n}\in(1,2]$，

$\therefore a\ge n-\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} \Leftrightarrow a\ge\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{\ln t}$，

令 $h(t)=\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{\ln t}$，则 $h'(t)=\dfrac{t+\frac{1}{t}-(\ln t)^2-2}{(t-1)^2(\ln t)^2}$，

由（Ⅱ）知 $t+\dfrac{1}{t}-(\ln t)^2-2\ge 0$，即 $h'(t)\ge 0$，

$\therefore h(t)$ 在 $(1,2]$ 单调递增，即 $\therefore h(t)_{\max}=h(2)=1-\dfrac{1}{\ln 2}$，

$\therefore a\ge 1-\dfrac{1}{\ln 2}$，即 a 的范围为 $[1-\dfrac{1}{\ln 2},+\infty)$． …………………12 分

22．解：（Ⅰ）∵ 直线 l 的参数方程为$\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=t \end{cases}$（$t$ 为参数），∴ $l: y=\dfrac{1}{2}(x+1)$．

∵ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，∴ 曲线 C：$x^2+y^2=2x$．

联立方程组$\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ y=\dfrac{1}{2}(x+1) \end{cases}$，得 $5x^2-6x+1=0$，解得$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=\dfrac{1}{5} \\ y_2=\dfrac{3}{5} \end{cases}$

∴ 直线 l 和曲线 C 交点的坐标为$(1,1),(\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5})$．…………………5 分

（Ⅱ）设 $B(\rho,\theta)$，则 $\rho=2\cos\theta$．

∴ $\triangle AOB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB=\dfrac{1}{2}|2\rho\sin(\dfrac{\pi}{3}-\theta)|=|2\cos\theta\sin(\dfrac{\pi}{3}-\theta)|$

$=|\cos(2\theta+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}|$，∴ 当 $\theta=\dfrac{23}{12}\pi$ 时，$\triangle AOB$ 的面积的最大值为 $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．…………………10 分

23．解：（Ⅰ）$f(x)=|x+3|+|x-1|=\begin{cases} -2x-2(x<-3), \\ 4(-3\le x\le 1), \\ 2x+2(x>1), \end{cases}$

当 $x<-3$ 时，$-2x-2<6$，解得 $-4<x<-3$；

当 $-3\le x\le 1$ 时，由 $4<6$ 可得 $-3\le x\le 1$；

当 $x>1$ 时，$2x+2<6$，解得 $1<x<2$．

综上，不等式 $f(x)<6$ 的解集 $M=\{x\mid -4<x<2\}$．…………………5 分

（Ⅱ）当 $a^2\in M$，$b^2\in M$ 时，即 $0\le a^2<2$，$0\le b^2<2$．

要证 $|ab+2|>|\sqrt{2}|a+b|$，只需证 $(ab+2)^2>2(a+b)^2$，

只需证 $a^2b^2+4ab+4>2a^2+4ab+2b^2$，只需证 $a^2b^2-2a^2-2b^2+4>0$，

只需证 $(a^2-2)(b^2-2)>0$，又 $a^2-2<0$，$b^2-2<0$，

故 $(a^2-2)(b^2-2)>0$ 成立，即原不等式成立．…………………10 分