绝密★启用前

高三摸底考试数学(理科)试题

一、选择题本大题共12小题，每小题5分，共60分，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合A＝$\{x||x|<2\}$，B＝{－2，－1，0，1，2}，则A∩B＝

A.{－1，0}　　B.{1，0}　　C.{－1，0，1}　　D.{－2，－1，0，1，2}

2.设复数z满足$\frac{z+1}{z-1}$，则$|\overline{z}|$＝

A.i　　B.－i　　C.1　　D.$\sqrt{2}$

3.已知命题p：$\exists x_0\in R$，$\sin x_0=\frac{\sqrt{7}}{2}$；命题q：$\forall x\in R$，$x^2-2x+2\geqslant 0$。下列结论正确的是

A.p∨q是真命题　　B.p∧q是真命题

C.(¬p)∨q是假命题　　D.(¬p)∧(¬q)是真命题

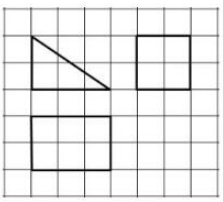
4.已知P为抛物线C：$y^2=2px(p>0)$上一点，点P到C的焦点的距离为9，到y轴的距离为6，则p＝

A.3　　B.6　　C.9　　D.12

5.设$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，且$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}+2\vec{b}|=$

A.3　　B.$\sqrt{3}$　　C.7　　D.$\sqrt{7}$

6.“堑堵”是中国古代数学名著《九章算术》中记载着的一种多面体。如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗实线画出的是某“堑堵”的三视图，则该“堑堵”的体积等于



A.12　　B.8　　C.6　　D.4

7.将函数y＝sinx的图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度，再把所得各点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，所得图象的函数解析式是

A.$y=\sin(2x-\frac{\pi}{10})$　　B.$y=\sin(2x-\frac{\pi}{5})$　　C.$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{10})$　　D.$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{20})$

8.三名教师教六个班的数学，则每人教两个班，分配方案共有

A.18种　　B.24种　　C.45种　　D.90种

9.在正四面体SABC中，D为SC的中点，则异面直线SA与BD所成角的余弦值是

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

10.分别在区间[1，6]和[1，4]内任取一个实数，依次记为m和n，则m>n的概率为

A. $\frac{7}{10}$　　B. $\frac{3}{10}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

11.设点A，B分别为双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点，点M，N分别在双曲线C的左、右支上，若$\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{MB}^2=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MB}$，且$|\overrightarrow{MB}|<|\overrightarrow{NB}|$，则双曲线C的离心率为

A. $\frac{\sqrt{65}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{85}}{5}$　　C. $\frac{13}{5}$　　D. $\frac{17}{7}$

12.函数f(x)＝xe^x，g(x)＝xlnx，若f(x_1)＝g(x_2)＝t，其中t>0，则$\frac{\ln t}{x_1x_2}$的最大值为

A. $\frac{1}{e}$　　B. $\frac{2}{e}$　　C. $\frac{1}{e^2}$　　D. $\frac{4}{e^2}$

二、填空题本大题共4小题，每小题5分，共20分，把答案填在题中横线上。

13.函数f(x)在定义域R内满足f(x)＝f(－x)，当x≥0时，f(x)＝x^2－2x，则不等式f(x＋1)<3的解集是___________。

14.已知$(x-3y)^n$的展开式中，第5项的二项式系数与第12项的二项式系数相等，则展开式共有___________项。

15.已知f(x)＝(x^2＋2x＋a)e^x，若f(x)存在极小值，则a的取值范围是___________。

16.已知数列{a_n}满足$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\cdots+\frac{a_n}{2n}=2^n+n$，则数列{$a_n$}的通项公式为___________。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17.(本小题满分12分)在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c。已知csinA＝acos($\frac{5\pi}{6}$－C)。

(1)求C；

(2)若D是线段AB上靠近A点的三等分点，且DA＝DC＝1，求△BCD的面积。

18.(本小题满分 12 分)某单位对其 30 名员工的饮食习惯进行了一次调查，并用如图所示的茎叶图表示他们的饮食指数(说明：图中饮食指数低于 70 的人，喜食蔬菜；饮食指数高于 70 的人，喜食肉类)。

(1)根据所给数据完成下面的 2×2 列联表。

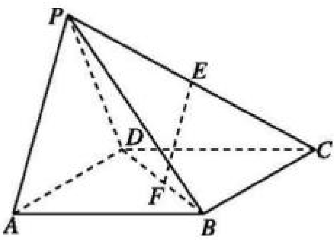
35岁以下		35岁以上
1	2	0 1 5 6 7 9
	3	2 3 7 9 6
5 3	4	4 5 2
8	5	8
	6	1
6 7 8 4	7	5 8
5 3 2	8	
0	9	

	喜食蔬菜	喜食肉类	总计
35岁以上			
35岁以下			
总计			

(2)能否有 99%的把握认为该单位员工的饮食习惯与年龄有关？

附：参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，n＝a＋b＋c＋d。

19.(本小题满分 12 分)如图，在四棱锥 P－ABCD 中，四边形 ABCD 是边长为 2 的正方形，△PAD 为等边三角形，E，F 分别为 PC，BD 的中点，且 EF⊥CD。



(1)证明：平面 PAD⊥平面 ABCD；

(2)求 EF 与平面 PDB 所成角的正弦值。

20.(本小题满分 12 分)已知函数 f(x)＝lnx－x＋1。

(1)求函数 f(x)的单调区间；

(2)证明：当 a≥1 时，$ax^2+3x-\ln x>0$。

21.(本小题满分 12 分)已知离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 A(－2，0)，斜率为 k(k≠0)的直线 l 交椭圆于 A，B 两点，交 y 轴于点 E，点 P 为线段 AB 的中点。

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若点 E 关于 x 轴的对称点为 H，过点 E 且与 OP(O 为坐标原点)垂直的直线交直线 AH 于点 M，求△MAP 面积的最大值。

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在极坐标系中，曲线 C 的方程为$\rho\cos2\theta = a\sin\theta(a>0)$，以极点为原点，极轴所在直线为 x 轴建立直角坐标系，直线 l 的参数方程为$\begin{cases} x = 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)，l 与 C 交于 M，N 两点。

(1)写出曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程；

(2)设点 P(2，－1)，若|PM|，|MN|，|PN|成等比数列，求 a 的值。

23.[选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x+\dfrac{2}{m}|+|x-m|(m>0)$。

(1)当 m＝1 时，求函数 f(x)的最小值；

(2)若存在 x∈(0，1)，使得不等式 f(x)≤3 成立，求实数 m 的取值范围。

高三摸底理科数学参考答案及评分标准

一.　　选择题:

1.C　2.C　3.A　4.B　5.D　6.C　7.C　8.D　9.D　10.A　11.B　12.A

二.　　填空题:

13. （-4，2）　14. 16

15. （-∞，2）　16. $a_n=\begin{cases}6 & (n=1)\\ 2^{2n-1}+2^n & (n\geq 2)\end{cases}$

三.　解答题:

17 解:(1)由正弦定理可得 csin A=asin C,则有 asin C=acos$(\frac{5\pi}{6}-C)$,

∴sin C=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$cos C+$\frac{1}{2}$sin C,∴tan C=$-\sqrt{3}$.∵C∈(0,π),∴C=$\frac{2\pi}{3}$-----------------------------5 分

(2)令 A=θ,θ∈$(0,\frac{\pi}{3})$,由题意知∠ACD=θ,∠BDC=2θ,∠ABC=$\frac{\pi}{3}$-θ,∠BCD

=$\frac{2\pi}{3}$-θ.在△BCD 中,由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle ABC}$,即$\frac{2}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}$,---------------8 分

∴2×($\frac{\sqrt{3}}{2}$cos θ$-\frac{1}{2}$sin θ)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$cos θ+$\frac{1}{2}$sin θ,得$\frac{\sqrt{3}}{2}$cos θ=$\frac{3}{2}$sin θ,

∴tan θ=$\frac{\sqrt{3}}{3}$,即θ=$\frac{\pi}{6}$,∴∠BDC=$\frac{\pi}{3}$,---10 分

∴△BCD 的面积为$\frac{1}{2}$×1×2×sin $\frac{\pi}{3}$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$. --12 分

18 解:

1.补全 2×2 列联表如下:

解:补全2×2列联表如下:

	喜食蔬菜	喜食肉类	总计
35岁以上	16	2	18
35岁以下	4	8	12
总计	20	10	30

………………………………………………………………………………………6 分

2.由题意得,$K^2=\frac{30\times(16\times 8-4\times 2)^2}{20\times 10\times 18\times 12}$=10>6.635,

故有 99%的把握认为该单位员工的饮食习惯与年龄有关.　……………………12 分

19.解:(1)证明:如图,连接 AC,

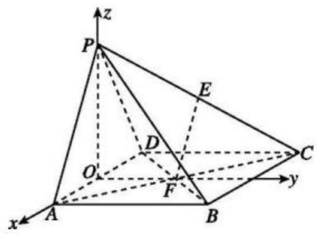
∵四边形 ABCD 是正方形,F 是 BD 的中点,∴F 是 AC 的中点,即 AC∩BD=F,

又 E 是 PC 的中点,∴EF∥PA,又 EF⊥CD,∴PA⊥CD,

又 AD⊥CD, AD∩AP=A, ∴CD⊥平面 PAD,

又 CD⊂平面 ABCD, ∴平面 PAD⊥平面 ABCD.

……………………………………………………………………………………5 分



(2)由(1)可知, EF∥PA,

∴EF 与平面 PDB 所成的角即为 PA 与平面 PDB 所成的角.

取 AD 的中点 O, 连接 OP, OF, ∵△PAD 是边长为 2 的等边三角形,

∴OP⊥AD 且 OP=$\sqrt{3}$.

由(1)可知, 平面 PAD⊥平面 ABCD, 故 OP⊥平面 ABCD, 又 OA⊥OF, 故 OA, OF, OP 两两垂直.

以 O 为坐标原点, 分别以 OA, OF, OP 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示,

则 A(1, 0, 0), B(1, 2, 0), P(0, 0, $\sqrt{3}$), D(-1, 0, 0), ------------------------------8 分

∴$\overrightarrow{PA}=(1,0,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{PB}=(1,2,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{PD}=(-1,0,-\sqrt{3})$.

设平面 PDB 的法向量为 n=(x, y, z), 则$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{PB}=x+2y-\sqrt{3}z=0, \\ n\cdot\overrightarrow{PD}=-x-\sqrt{3}z=0, \end{cases}$

取 z=1, 得 n=$(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$. --10

设 EF 与平面 PDB 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PA},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot n|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|n|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

∴EF 与平面 PDB 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$.

……………………………………………………………………………………12 分

20. (1)由题意, 函数 $f(x)=\ln x-x+1$ 的定义域为$(0,+\infty)$, 且 $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,

当 x>1 时, f'(x)<0; 当 0<x<1 时, f'(x)>0. 所以 f(x)在(0, 1)上单调递增, 在(1, +∞)上单调递减, 即 f(x)的单调递增区间为(0, 1), 单调递减区间为(1, +∞).

……………………………………………………………………………………5 分

(2) 证明: 由(1)得 f(x)在(0, 1)上单调递增, 在(1, +∞)上单调递减,

所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$, 即 $\ln x\leqslant x-1$, 所以 $-\ln x\geqslant-(x-1)$, ------------------------8 分

因为 a≥1, 所以 $ax^2\geqslant x^2$ 则 $ax^2+3x-\ln x\geqslant x^2+3x-(x-1)\ (x>0)$, 即 $(x+1)^2>0$, (x>0)

即 $ax^2+3x-\ln x>0$. --12 分

21.解:(1)由已知得$\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ a=2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{2},\\ c=\sqrt{2},\end{cases}$所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

……………………………………………………………………………………4 分

(2)由题意知直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$,则 $E(0,2k)$,$H(0,-2k)$,

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k(x+2)\end{cases}$ 消去 y,得 $(2k^2+1)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$, $\Delta=64k^4-4(2k^2+1)(8k^2-4)=16>0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_0,y_0)$,则 $x_1+x_2=-\frac{8k^2}{2k^2+1}$, $x_1x_2=\frac{8k^2-4}{2k^2+1}$,------------------6 分

则 $x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-\frac{4k^2}{2k^2+1}$,

$y_0=k(x_0+2)=k\left(-\frac{4k^2}{2k^2+1}+2\right)=\frac{2k}{2k^2+1}$,

所以 $k_{OP}=\frac{y_0}{x_0}=-\frac{2k}{4k^2}=-\frac{1}{2k}$,

则直线 EM 的斜率 $k_{EM}=-\frac{1}{k_{OP}}=2k$,所以直线 EM 的方程为 $y=2kx+2k$,

直线 AH 的方程为 $y=-k(x+2)$,由 $\begin{cases}y=2kx+2k,\\ y=-k(x+2),\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=-\frac{4}{3},\\ y=-\frac{2}{3}k,\end{cases}$ 所以 $M\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}k\right)$.----8 分

点 $M\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}k\right)$到直线 l:$kx-y+2k=0$ 的距离

$d=\frac{|-\frac{4}{3}k+\frac{2}{3}k+2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|\frac{4}{3}k|}{\sqrt{k^2+1}}$, $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{2k^2+1}$,

则 $|AP|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{2k^2+1}$,--10 分

故△MAP 的面积 $S=\frac{1}{2}|AP|d=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1+k^2}}{2k^2+1}\cdot\frac{|\frac{4}{3}k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\frac{4}{3}|k|}{2k^2+1}=\frac{\frac{4}{3}}{2|k|+\frac{1}{|k|}}\leqslant\frac{\frac{4}{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

当且仅当 $|k|=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号,所以△MAP 面积的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$.------------------12 分

22.解:(1)由题意知,曲线 C 的极坐标方程可化为 $\rho^2\cos^2\theta=a\rho\sin\theta\ (a>0)$,

将 $\rho\cos\theta=x$, $\rho\sin\theta=y$ 代入上式,可得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2=ay(a>0)$.-------2 分

消去直线 l 的参数方程$\begin{cases}x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)中的参数 t,得直线 l 的普通方程为 $x+y-1=0$.

……………………………………………………………………………………4 分

(2)把 l 的参数方程$\begin{cases}x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)代入 $x^2=ay$,得 $t^2-(4\sqrt{2}+\sqrt{2}a)t+(8+2a)=0$,

则 $\Delta=2a^2+8a>0$, 设方程的两根为 t_1, t_2,

则 $t_1+t_2=4\sqrt{2}+\sqrt{2}a>0$, $t_1t_2=8+2a>0$, 可得 $t_1>0, t_2>0$. ----------------------------6 分

不妨设 $|PM|=t_1$, $|PN|=t_2$, 则 $|MN|=|t_1-t_2|$.

因为 $|PM|$, $|MN|$, $|PN|$ 成等比数列, 所以 $(t_1-t_2)^2=t_1t_2$, 即 $(t_1+t_2)^2=5t_1t_2$, -----------8 分

则 $(4\sqrt{2}+\sqrt{2}a)^2=5(8+2a)$, 解得 $a=1$ 或 $a=-4$(舍去),

所以实数 $a=1$.

……………………………………………………………………………………………10 分

23 解（1）当 m=1 时，$f(x)=|x+2|+|x-1|$,

$$|x+2|+|x-1|\geq|(x+2)-(x-1)|=3$$

$f(x)$最小值为 3

……………………………………………………………………………………………4 分

（2）由题意存在 $x\in(0,1)$，使得不等式 $f(x)\leqslant 3$ 成立

$$x+\frac{2}{m}+|x-m|\leq 3$$

(i)当 $m\geq 1$ 时 $x+\frac{2}{m}+|x-m|\leq 3$ 等价于 $m+\frac{2}{m}\leq 3$，所以 $1\leq m\leq 2$（ii）当 $0<m<1$ 时

$f(x)=x+\frac{2}{m}+|x-m|=\begin{cases}\frac{2}{m}+m, 0<x<m\\ 2x+\frac{2}{m}-m, m\leq x<1\end{cases}$, 则$f(x)_{\min}=\frac{2}{m}+m$, 所以$\frac{2}{m}+m\leq 3$，所以 $1\leq m\leq 2$，与“$0<m<1$”矛盾，此时无解。综上：实数 m 的取值范围为$[1，2]$.

……………………………………………………………………………………………10 分