合肥市2021年高三第一次教学质量检测

数学(理)试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	D	A	A	C	B	D	A	C	D

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. -2　　14. 4　　15. -16　　16. 27

三、解答题：

17.（本小题满分12分）

解：(1) $P=1-\frac{7}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{3}{8}$；　　…………………………5分

(2)设每个坯件的加工成本为ξ元，则

$$P(\xi=70)=\frac{1}{8}，P(\xi=130)=\frac{7}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{8}，P(\xi=160)=\frac{7}{8}\times\frac{6}{7}=\frac{3}{4}，$$

∴ξ的分布列为

ξ	70	130	160
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$

∴$E\xi=70\times\frac{1}{8}+130\times\frac{1}{8}+160\times\frac{3}{4}=145$，

∴每个坯件加工成本的期望为145元.　　…………………………12分

18.（本小题满分12分）

解：由已知条件和三角函数的定义得，$A(\cos\varphi,\sin\varphi)$，$P(\sqrt{3}\cos\pi t,\sqrt{3}\sin\pi t)$，

∴$f(t)=|AP|^2=\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\cos\pi t\right)^2+\left(\sin\varphi-\sqrt{3}\sin\pi t\right)^2=4-2\sqrt{3}\cos(\pi t-\varphi)$.

(1)若$\varphi=\frac{\pi}{3}$，则$f(t)=4-2\sqrt{3}\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$.

令$2k\pi\le\pi t-\frac{\pi}{3}\le\pi+2k\pi(k\in Z)$，得$\frac{1}{3}+2k\le t\le\frac{4}{3}+2k(k\in Z)$.

又∵$t\in(0,2)$，∴函数$f(t)$的单调递增区间是$\left[\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]$.　　…………………………6分

(2)由$f\left(\frac{1}{3}\right)=2$，及$\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{5\pi}{6}$得，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{3}-\varphi<0$，∴$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，

∴$f\left(\frac{5}{6}\right)=4-2\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\varphi\right)=4+2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=4-2\sqrt{2}$.　　…………………………12分

19.（本小题满分12分）

解：(1)连接BE交AC于点M，连接GM，CE.

由已知可得，四边形$ABCE$是正方形，∴M是线段BE的中点.

∵G为线段PB的中点，∴$PE//GM$.

∵$GM\subset$平面GAC，$PE\not\subset$平面GAC，∴$PE//$平面GAC.

∵E，F分别是线段AD，CD的中点，∴$EF//AC$.

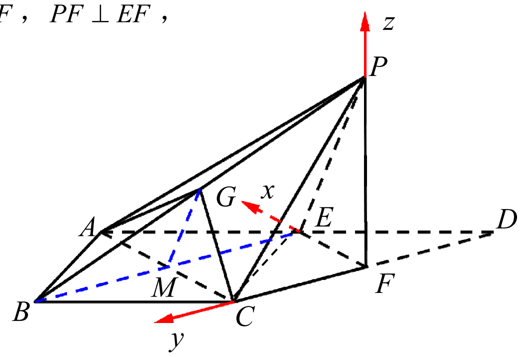
∵$AC\subset$平面GAC，$EF\not\subset$平面GAC，∴$EF//$平面GAC.

又∵$PE\cap EF=E$，PE，$EF\subset$平面PEF，∴平面$GAC//$平面PEF.　　…………………………6分

(2) ∵平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCFE$，平面 $PEF\cap$ 平面 $ABCFE=EF$，$PF\perp EF$，

∴ $PF\perp$ 平面 $ABCFE$，∴ FE，FC，FP 两两垂直.

以点 F 为原点，FE，FC，FP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示空间直角坐标系，则 P（0，0，1），C（0，1，0），B（1，2，0），A（2，1，0），$G\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.



∴ $\overrightarrow{AG}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$.

设平面 PAC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-y+z=0,\\ 2x=0.\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $\vec{n}=(0,1,1)$.

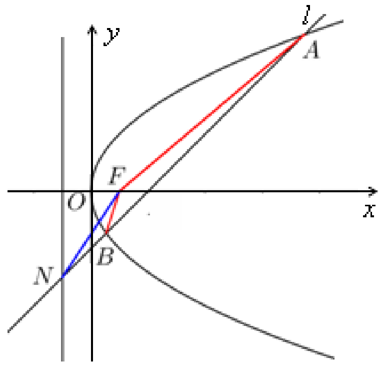
设直线 AG 与平面 PAC 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AG},\vec{n}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AG}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AG}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{10}.$$

∴直线 AG 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$. ……………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解：(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.



由 $\begin{cases}y^2=2px\\ y=k(x-m)\end{cases}$ 消去 y 得 $k^2x^2-2(k^2m+p)x+k^2m^2=0$.

∵ l 与抛物线 E 交于两点，∴ $k\neq0$.

又∵ $m>0$，$p>0$，∴ $\Delta=8k^2mp+4p^2>0$ 恒成立，

∴ $\begin{cases}x_1+x_2=2m+\frac{2p}{k^2},\\ x_1x_2=m^2.\end{cases}$

当 $k=1$ 时，$|AB|=4\sqrt{2m+2}$.

∴ $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=2\sqrt{4mp+2p^2}=4\sqrt{2m+2}$，化简得 $(p+2m+2)(p-2)=0$.

∵ $p>0,m>0$，∴ $p=2$. ∴抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$. ……………………………6 分

(2) 假设存在常数 k 满足题意.

∵抛物线 E 的方程为 $y^2=2px$，其焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线为 $x=-\frac{p}{2}$，

∴ $N\left(-\frac{p}{2},-k\left(m+\frac{p}{2}\right)\right)$，从而 $|FN|^2=p^2+k^2\left(m+\frac{p}{2}\right)^2$.

由抛物线的定义得，$|FA|=x_1+\frac{p}{2}$，$|FB|=x_2+\frac{p}{2}$，

∴ $|FA|\cdot|FB|=\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\cdot\left(x_2+\frac{p}{2}\right)=x_1x_2+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+\frac{p^2}{4}=\left(m+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{k^2}$.

由 $|FA|\cdot|FB|=|FN|^2$ 得 $\left(m+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{k^2}=p^2+k^2\left(m+\frac{p}{2}\right)^2$，即 $(k^2-1)\left[\left(m+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{k^2}\right]=0$.

∵ $\left(m+\frac{p}{2}\right)^2>0$，$\frac{p^2}{k^2}>0$，∴ $k^2-1=0$，解得 $k=\pm1$.

∴存在 $k=\pm1$，使得 $|FA|\cdot|FB|=|FN|^2$ 对于任意的正数 m 都成立. ………………………12 分

21.(本小题满分 12 分)

解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{x-a}{x^2}$.

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 至多有一个零点，不符合题意；

②当 $a>0$ 时，$f'(a)=0$，且当 $x\in(0,\ a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

∴ $f(x)$ 在 $(0,\ a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，从而 $f(x)$ 的最小值为 $f(a)=\ln a+2$.

(i)若 $f(a)\ge 0$，即 $a\ge e^{-2}$，此时 $f(x)$ 至多有一个零点，不符合题意；

(ii)若 $f(a)<0$，即 $0<a<e^{-2}$.

∵ $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，$f(a)<0$，$f(1)=a+1>0$，

根据零点存在性定理得，$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

又∵ $f(x)$ 在 $(0,\ a)$ 上单调递减，且 $f(a)<0$，

考虑 $f(a^2)=2\ln a+\dfrac{1}{a}+1$ 的正负, 令 $g(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}+1$，$x\in(0,\ e^{-2})$，则 $g'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}<0$.

∴ $g(x)$ 在 $(0,\ e^{-2})$ 上单调递减，∴ $g(x)>g(e^{-2})=e^2-3>0$，即 $f(a^2)=2\ln a+\dfrac{1}{a}+1>0$.

∵ $0<a^2<a$，∴ $f(a^2)>0$，$f(a)<0$，

根据零点存在性定理得，$f(x)$ 在 $(0,\ a)$ 有且仅有一个零点.

所以，当 $0<a<e^{-2}$ 时，$f(x)$ 恰有两个零点，符合题意.

综上得，$0<a<e^{-2}$.　　　　　　　　　　…………………………………6 分

⑵ 由条件得，$\begin{cases}\ln x_1+\dfrac{a}{x_1}+1=0,\\ \ln x_2+\dfrac{a}{x_2}+1=0,\end{cases}$　∴ $\begin{cases}\ln x_1+\ln x_2=-a\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)-2,\\ \ln x_1-\ln x_2=a\left(\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}\right).\end{cases}$

$$\therefore \ln x_1+\ln x_2=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}\right)-2=\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}(\ln x_2-\ln x_1)-2=\frac{1+\dfrac{x_2}{x_1}}{1-\dfrac{x_2}{x_1}}\cdot\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-2.$$

要证 $x_1x_2<e^{-4}$，即证 $\ln x_1+\ln x_2<-4$，即证 $\dfrac{1+\dfrac{x_2}{x_1}}{1-\dfrac{x_2}{x_1}}\cdot\ln\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)-2<-4$，

即证 $\dfrac{1+\dfrac{x_2}{x_1}}{1-\dfrac{x_2}{x_1}}\cdot\ln\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)<-2$，亦即证 $\dfrac{\dfrac{x_2}{x_1}+1}{\dfrac{x_2}{x_1}-1}\cdot\ln\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)>2$ ①.

设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，不妨设 $x_1<x_2$，由 $0<x_1<e^{-2}<x_2$ 知，$t>1$.

证①式，即转化为证明：当 $t>1$ 时，$\dfrac{t+1}{t-1}\ln t>2$.

设 $h(t)=\ln t-2\cdot\dfrac{t-1}{t+1}$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$.

∴当 $t>1$ 时，$h'(t)>0$ 恒成立，即 $h(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

∴当 $t>1$ 时，$h(t)>h(1)=0$，∴ $x_1x_2<\dfrac{1}{e^4}$ 成立.　…………………………………12 分

⑵ 另解：不妨设 $x_1<x_2$.

由⑴可知，$a\in(0,\ e^{-2})$，$x_1\in(0,\ a)$，$x_2\in(a,+\infty)$，$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

要证$x_1\cdot x_2<\dfrac{1}{e^4}\Leftarrow x_2<\dfrac{1}{x_1e^4}\Leftarrow f\left(x_2\right)<f\left(\dfrac{1}{x_1e^4}\right)\Leftarrow 0<-\ln x_1-3+ae^4x_1\Leftarrow \ln x_1+3-ae^4x_1<0$.

由$f\left(x_1\right)=\ln x_1+\dfrac{a}{x_1}+1=0$得，$a=-x_1\left(\ln x_1+1\right)$.

∴只需证$\ln x_1+3+e^4x_1^2\left(\ln x_1+1\right)<0$　①.

令$h\left(x\right)=\ln x+3+e^4x^2\left(\ln x+1\right)$，则$h'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+e^4x\left(2\ln x+3\right)$.

令$\varphi\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+e^4x\left(2\ln x+3\right)$，则$\varphi'\left(x\right)=-\dfrac{1}{x^2}+e^4\left(2\ln x+5\right)=e^4-\dfrac{1}{x^2}+e^4(2\ln x+4)$.

由$0<x<e^{-2}$得$\ln x<-2$，$e^4<\dfrac{1}{x^2}$，∴$\varphi'\left(x\right)<0$，∴$\varphi\left(x\right)$在$\left(0,\ e^{-2}\right]$上单调递减，且$\varphi\left(e^{-2}\right)=0$，

∴$x\in\left(0,\ e^{-2}\right)$，$\varphi\left(x\right)>0$，即$h'\left(x\right)>0$，

∴$h\left(x\right)$在$\left(0,\ e^{-2}\right]$上单调递增，且$h\left(e^{-2}\right)=0$，而$x_1<a<e^{-2}$，

∴$h\left(x_1\right)<h\left(e^{-2}\right)=0$，即①式得证，∴$x_1x_2<\dfrac{1}{e^4}$. ……………………………12分

22.(本小题满分10分)

解：⑴化简曲线C参数方程得，$\begin{cases}x=\cos 2\beta\\ y=\dfrac{1}{2}\sin 2\beta\end{cases}$（$\beta$为参数，且$\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$）.

消去参数β得曲线C的普通方程为$x^2+4y^2=1\left(x\neq -1\right)$，

化成极坐标方程为$\left(\rho\cos\theta\right)^2+4\left(\rho\sin\theta\right)^2=1$ $\left(\theta\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z\right)$.

∴$\rho^2=\dfrac{1}{1+3\sin^2\theta}$（$\theta\neq\pi+2k\pi$，$k\in Z$）. ……………………………5分

⑵不妨设M（ρ_1，θ），N（ρ_2，$\theta+\dfrac{\pi}{3}$），则$|OM|=\rho_1$，$|ON|=\rho_2$，

∴$\dfrac{1}{|OM|^2}-\dfrac{1}{|ON|^2}=1+3\sin^2\theta-\left[1+3\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta-\dfrac{9}{4}\cos 2\theta=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

当且仅当$\theta=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\left(k\in Z\right)$时，$\dfrac{1}{|OM|^2}-\dfrac{1}{|ON|^2}$取最大值$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………10分

23.(本小题满分10分)

解：⑴由$f\left(1\right)\geq 1$得$|2a-1|-2|a+1|\geq 1$，

∴$\begin{cases}a\leq -1,\\ 1-2a+2\left(a+1\right)\geq 1,\end{cases}$或$\begin{cases}-1<a\leq\dfrac{1}{2},\\ 1-2a-2\left(a+1\right)\geq 1,\end{cases}$或$\begin{cases}a>\dfrac{1}{2},\\ 2a-1-2\left(a+1\right)\geq 1.\end{cases}$

解得$a\leq -1$，或$-1<a\leq -\dfrac{1}{2}$.

∴a的取值范围为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$. ……………………………5分

⑵设$x^2=t$（$t\geq 0$）.

由已知得，对任意$t\geq 0$，使得$f\left(t\right)\leq 0$成立.

∵$f\left(t\right)\leq 0\Leftrightarrow |t-2a|\leq 2|t+a|\Leftrightarrow\left(t-2a\right)^2\leq 4\left(t+a\right)^2\Leftrightarrow 3t^2+12at\geq 0$.

当$t=0$，$a\in\mathrm{R}$；当$t>0$，$t+4a\geq 0$恒成立，即$a\geq 0$.

∴$a\geq 0$，即a的最小值为0. ……………………………10分