

数学试题

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第 I 卷

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $(-1+3i)z=10$,则复数 z 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知集合 $A=\{x|x(2-x)\geq 0\}$, $B=\{x|-5\leq 3-2x\leq 1\}$,则 $A\cup B=$
A. $[0,4]$ B. $[1,4]$ C. $[0,2]$ D. $[1,2]$
3. “ $x^2>4$ ”是“ $3^x>9$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数,当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=\log_2(x+2)+t$,则 $f(-6)=$
A. -2 B. 2 C. -4 D. 4

5. 铸于明嘉靖十二年的泰山岱庙铁塔,造型质朴雄伟,原有十三级,抗日战争中被日军飞机炸毁,现仅存三级,它的底座是近似圆形的,如图 1. 我国古代工匠已经知道,将长方体砖块以某个固定的角度相接就可砌出近似圆形的建筑,现存铁塔的底座是用 10 块一样的长方体砖块砌成的近似圆形的墙面,每块长方体砖块底面较长的边长为 1 个单位,相邻两块砖之间的夹角固定为 36° ,如图 2,则此近似圆形墙面内部所能容纳最大圆的半径是



图 1

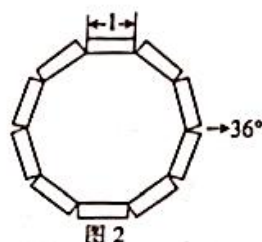
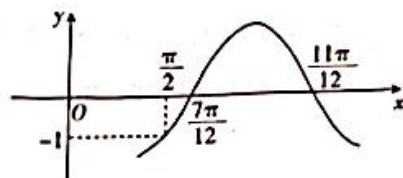


图 2

6. 已知某地居民在 2020 年“双十一”期间的网上购物消费额 ξ (单位:千元)服从正态分布 $N(2,1)$, 则该地某居民在 2020 年“双十一”期间的网上购物消费额在 $(0,3]$ 内的概率为
附:随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $P(\mu-\sigma < \xi \leq \mu+\sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu-2\sigma < \xi \leq \mu+2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu-3\sigma < \xi \leq \mu+3\sigma) \approx 0.9973$.
A. 0.9759 B. 0.8186 C. 0.73 D. 0.4772

7. 函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 的部分图象

如图所示,且 $f(\frac{\pi}{2})=-1$,现将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,得到函数 $y=g(x)$ 的图象,则 $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 上的值域是



- A. $[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$
- B. $[1, \sqrt{2}]$
- C. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$
- D. $[-\sqrt{2}, 1]$

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的中心为 O , 圆 $M: (x-a)^2 + y^2 = b^2$ 与双曲线 C 的一条渐近线交于 P, Q 两点. 若 $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MO} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$, 则双曲线 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{65}}{8}$

B. $\frac{5\sqrt{2}}{7}$

C. $\frac{\sqrt{30}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{17}}{4}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知向量 $a = (m, 2), b = (-4, 3)$, 下列说法正确的有

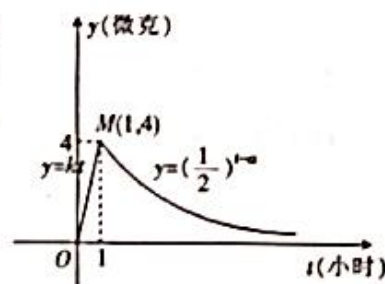
A. 若 $a \parallel b$, 则 $m = -\frac{3}{8}$

B. 若 $m = 0$, 则 a 与 b 夹角的正弦值为 $\frac{4}{5}$

C. 若 $a \perp b$, 则 $m = -\frac{3}{2}$

D. 若 $|a+b| = 13$, 则 $m = -8$ 或 16

10. 某医药研究机构开发了一种新药, 据监测, 如果患者每次按规定的剂量注射该药物, 注射后每毫升血液中的含药量 y (微克) 与时间 t (小时) 之间的关系近似满足如图所示的曲线. 据进一步测定, 当每毫升血液中含药量不少于 0.125 微克时, 治疗该病有效, 则



A. $a = 3$

B. 注射一次治疗该病的有效时间长度为 6 小时

C. 注射该药物 $\frac{1}{8}$ 小时后每毫升血液中的含药量为 0.4 微克

D. 注射一次治疗该病的有效时间长度为 $5\frac{31}{32}$ 小时

11. 素数在密码学、生物学等方面应用广泛, 下表为森德拉姆(Sundaram, 1934)素数筛法矩阵:

4	7	10	13	16	19	...
7	12	17	22	27	32	...
10	17	24	31	38	45	...
13	22	31	40	49	58	...
16	27	38	49	60	71	...
19	32	45	58	71	84	...
...	...	...	...	...	...	...

其特点是每行每列的数均成等差数列, 如果正整数 n 出现在矩阵中, 则 $2n+1$ 一定是合数, 反之如果正整数 n 不在矩阵中, 则 $2n+1$ 一定是素数, 下面结论中为真命题的有

A. 第 4 行第 10 列的数为 94

B. 第 7 行的数构成公差为 15 的等差数列

C. 592 不会出现在此矩阵中

D. 第 10 列中前 10 行的数之和为 1255

12. 已知函数 $f(x) = \frac{2\ln(-x)}{x}$, $g(x) = \frac{x-2m}{3x^2}$, 若函数 $h(x) = g(f(x)) + \frac{1}{m}$ 有 3 个不同的零点

x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_3)$ 的取值可以是

A. $-\frac{2}{e}$

B. $\frac{2}{e}$

C. $\frac{1}{e}$

D. $-\frac{1}{e}$

第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $a > 0, b > 0, a + 3b = 2$, 则 $\frac{4}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 有 8 名大学生到甲、乙、丙三所学校去支教, 每名大学生只去一所学校, 若甲学校需要 2 名, 乙学校需要 2 名, 丙学校需要 4 名, 则不同安排方法的种数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用数字作答)
15. 已知直线 $y = -x - 4$ 与抛物线 $y^2 = -12x$ 相交于 A, B 两点, 抛物线的焦点为 F , 则 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的四个顶点 A, B, C, D 均在球 O 的球面上, $AB=AC=AD$, $\triangle BCD$ 是边长为 4 的等边三角形, M, N 分别是 AB, BC 的中点, $DM \perp MN$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$, 球 O 的表面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (本题第一空 3 分, 第二空 2 分)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在① $\sqrt{S_{n+1}} = \sqrt{S_n} + 1$, ② $\sqrt{4S_n - 1}$ 是 $2n+1$ 与 a_n 的等比中项, ③ $4S_n = (1+a_n)^2$ ($a_n > 0$) 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解答.

问题: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, 且满足 $\underline{\hspace{2cm}}$, 若 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求使不等式

$b_1 + b_2 + \dots + b_n > \frac{9}{19}$ 成立的最小正整数 n .

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)

已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边,

且 $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin A \cdot \sin B \sin C$.

(1) 若 $b = \sqrt{3}c$, $\triangle ABC$ 的面积为 3, 求 b 与 c ;

(2) 若 $\sin B + \sin C = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 求 C .

19. (12 分)

国际学生评估项目(PISA), 是经济合作与发展组织(OECD)举办的, 该项目的内容是对 15 岁学生的阅读、数学、科学能力进行评价研究. 在 2018 年的 79 个参测国家(地区)的抽样测试中, 中国四省市(北京、上海、江苏、浙江)作为一个整体在所有参测国家(地区)取得全部 3 项科目中第一的好成绩. 某机构为了分析测试结果优劣的原因, 从参加测试的中国学生中随机抽取了 200 名参赛选手进行调研, 得到如下统计数据:

	成绩优秀	成绩一般	总计
家长高度重视学生教育	90	x	y
家长重视学生教育度一般	30	z	w
总计	120	80	200

若从上表“家长高度重视学生教育”的参测选手中随机抽取一人, 则选到的是“成绩一般”的选手的概率为 $\frac{4}{13}$.

- (1) 判断是否有 99.9% 的把握认为“学生取得的成绩情况”与“家长对学生的教育重视程度”有关；
 (2) 现从成绩优秀的选手中按照分层抽样的方法抽取 20 人，进行“家长对学生情感支持”的调查，再从这 20 人中抽取 3 人进行“学生家庭教育资源保障”的调查，记进行“学生家庭教育资源保障”调查中抽取到“家长高度重视学生教育”的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望。

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$.

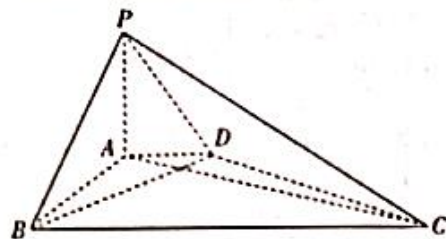
$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$ ，侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ，
 $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $AB = \sqrt{3}AD$, $\angle ACB = 30^\circ$.

(1) 证明： $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 当直线 PC 与平面 PBD 所成的角最大时，求二面角 $P-BD-C$ 的余弦值.



21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , $|F_1F_2| = 4$, 且 $a = \sqrt{2}b$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 A, B 为 C 上的两个动点，过 F_2 且垂直 x 轴的直线平分 $\angle AF_2B$ ，证明直线 AB 过定点.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = a(\frac{1}{x} - 1) - \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $a = 1$, 证明: $\ln(x+1) \cdot f(x) < 1 + e^{-2}$.