南京市、盐城市2021届高三年级第二次模拟考试

数 学 试 题

(总分150分，考试时间120分钟)

注意事项：

1．本试卷考试时间为120分钟，试卷满分150分，考试形式闭卷.

2．本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置，否则不给分.

3．答题前，务必将自己的姓名、准考证号用 0．5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第I卷（选择题　共60分）

一、单项选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．设复数 z_1，z_2 在复平面内的对应点关于实轴对称，$z_1=3+4\mathrm{i}$，则 $z_1z_2=$

A．25　　B．-25　　C．$7-24\mathrm{i}$　　D．$-7-24\mathrm{i}$

2．设集合 A，B 是全集 U 的两个子集，则“$A\cap B=\varnothing$”是“$A\subseteq \complement_U B$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是相互垂直的单位向量，与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $\boldsymbol{c}$ 的模为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

4．在流行病学中，基本传染数是指每名感染者平均可传染的人数．当基本传染数高于1时，每个感染者平均会感染一个以上的人，从而导致感染这种疾病的人数呈指数级增长．当基本传染数持续低于 1 时，疫情才可能逐渐消散．广泛接种疫苗可以减少疾病的基本传染数．假设某种传染病的基本传染数为 R_0，1 个感染者在每个传染期会接触到 N 个新人，这 N 人中有 V 个人接种过疫苗($\frac{V}{N}$称为接种率)，那么 1 个感染者新的传染人数为$\frac{R_0}{N}(N-V)$．已知新冠病毒在某地的基本传染数 $R_0=2.5$，为了使 1 个感染者传染人数不超过 1，该地疫苗的接种率至少为(　　)

A．40%　　B．50%　　C．60%　　D．70%

5．计算 $\frac{2\cos10^{\circ}-\sin20^{\circ}}{\cos20^{\circ}}$所得的结果为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

6．密位制是度量角的一种方法．把一周角等分为 6000 份，每一份叫做 1 密位的角．以密位作为角的度量单位，这种度量角的单位制，叫做角的密位制．在角的密位制中，采用四个数码表示角的大小，单位名称密位二字可以省去不写．密位的写法是在百位数与十位数字之间画一条短线，如 7 密位写成“0-07”，478 密位写成“4-78”．1 周角等于 6000 密位，记作 1 周角＝60-00，1 直角＝15-00．如果一个半径为 2 的扇形，它的面积为$\frac{7}{6}\pi$，则其圆心角用密位制表示为

A．12-50　　B．17-50　　C．21-00　　D．35-00

7．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_2 作倾斜角为 θ 的直线 l 交双曲线 C 的右支于 A，B 两点，其中点 A 在第一象限，且 $\cos\theta=\frac{1}{4}$. 若$|AB|=|AF_1|$，则双曲线 C 的离心率为

A．4　　B．$\sqrt{15}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

8．已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，其导函数为$f'(x)$，且当 $x>0$ 时，$f'(x)\cdot\ln x+\frac{f(x)}{x}>0$，则不等式$(x^2-1)f(x)<0$ 的解集为

A．$(-1,\ 1)$　　B．$(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)$

C．$(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$　　D．$(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 对于两条不同直线 m，n 和两个不同平面 α，β，下列选项中正确的为

A．若 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\perp n$　　B．若 $m//\alpha$，$n//\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\perp n$ 或 $m//n$

C．若 $m//\alpha$，$\alpha//\beta$，则 $m//\beta$ 或 $m\subset\beta$　　D．若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n//\alpha$ 或 $n\subset\alpha$

10．已知 $a>b>0$，下列选项中正确的为

A．若$\sqrt{a}-\sqrt{b}=1$，则 $a-b<1$　　B．若 $a^2-b^2=1$，则 $a-b<1$

C．若 $2^a-2^b=1$，则 $a-b<1$　　D．若 $\log_2a-\log_2b=1$，则 $a-b<1$

11．已知函数 $f(x)=\sqrt{|\sin x|}+\sqrt{|\cos x|}$，则

A．$f(x)$是周期函数

B．$f(x)$的图象必有对称轴

C．$f(x)$的增区间为$[k\pi，k\pi+\dfrac{\pi}{2}]$，$k\in\mathbf{Z}$

D．$f(x)$的值域为$[1，\sqrt[4]{8}]$

12．已知 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant2$，p，$q>0$，$p+q=1$．设 $f(k)=C_{2n}^{k}p^kq^{2n-k}$，其中 $k\in\mathbf{N}$，$k\leqslant2n$，则

A．$\sum\limits_{k=0}^{2n}f(k)=1$

B．$\sum\limits_{k=0}^{2n}kf(k)=2npq$

C．若 $np=4$，则 $f(k)\leqslant f(8)$

D．$\sum\limits_{k=0}^{n}f(2k)<\dfrac{1}{2}<\sum\limits_{k=1}^{n}f(2k-1)$

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13．某班 4 名同学去参加 3 个社团，每人只参加 1 个社团，每个社团都有人参加，则满足上述要求的不同方案共有__▲__种．（用数字填写答案）

14．已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的右顶点为 A，右焦点为 F，以 A 为圆心，R 为半径的圆与椭圆相交于 B，C 两点．若直线 BC 过点 F，则 R 的值为__▲__．

15．在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $PA=2$．若点 E，F 分别为 AB，AD 的中点，则直线 EF 被四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球所截得的线段长为__▲__．

16．牛顿迭代法又称牛顿－拉夫逊方法，它是牛顿在 17 世纪提出的一种在实数集上近似求解方程根的一种方法．具体步骤如下：设 r 是函数 $y=f(x)$的一个零点，任意选取 x_0 作为 r 的初始近似值，过点$(x_0，f(x_0))$作曲线 $y=f(x)$的切线 l_1，设 l_1 与 x 轴交点的横坐标为 x_1，并称 x_1 为 r 的 1 次近似值；过点$(x_1，f(x_1))$作曲线 $y=f(x)$的切线 l_2，设 l_2 与 x 轴交点的横坐标为 x_2，并称 x_2 为 r 的 2 次近似值．一般的，过点$(x_n，f(x_n))(n\in\mathbf{N})$作曲线 $y=f(x)$的切线 l_{n+1}，记 l_{n+1} 与 x 轴交点的横坐标为 x_{n+1}，并称 x_{n+1} 为 r 的 $n+1$ 次近似值．设 $f(x)=x^3+x-1(x\geqslant0)$的零点为 r，取 $x_0=0$，则 r 的 2 次近似值为__▲__；设 $a_n=\dfrac{3x_n^3+x_n}{2x_n^3+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，数列$\{a_n\}$的前 n 项积为 T_n．若任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$T_n<\lambda$ 恒成立，则整数 λ 的最小值为__▲__．

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．(本小题满分 10 分)

在①$b=\sqrt{3}a$；②$a=3\cos B$；③$a\sin C=1$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中．若问题中的三角形存在，求该三角形面积的值；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在$\triangle ABC$，它的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sin B-\sin(A-C)=\sqrt{3}\sin C$，$c=3$，______？

18．(本小题满分 12 分)

已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2^n+r$，其中 r 为常数．

（1）求 r 的值；

（2）设 $b_n=2(1+\log_2 a_n)$，若数列$\{b_n\}$中去掉数列$\{a_n\}$的项后余下的项按原来的顺序组成数列$\{c_n\}$，求 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}$ 的值．

19．(本小题满分 12 分)

某公司对项目 A 进行生产投资，所获得的利润有如下统计数据表：

项目 A 投资金额 x（单位：百万元）	1	2	3	4	5
所获利润 y（单位：百万元）	0.3	0.3	0.5	0.9	1

（1）请用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，并用相关系数加以说明；

（2）该公司计划用 7 百万元对 A，B 两个项目进行投资．若公司对项目 B 投资 x（$1\leqslant x\leqslant 6$）百万元所获得的利润 y 近似满足：$y=0.16x-\dfrac{0.49}{x+1}+0.49$，求对 A，B 两个项目投资金额分别为多少时，获得的总利润最大？

附：①对于一组数据(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，其回归直线方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$．

②线性相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2)}}$. 一般地，相关系数 r 的绝对值在 0.95 以上(含 0.95)认为线性相关性较强；否则，线性相关性较弱.

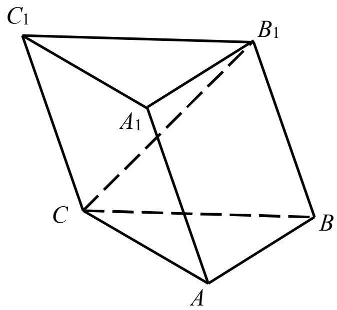
参考数据：对项目 A 投资的统计数据表中 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=11$，$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2=2.24$，$\sqrt{4.4}\approx2.1$.

20．(本小题满分 12 分)

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，$B_1C=\sqrt{6}$，且 $AB\perp B_1C$.

（1）求证：平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 ABC；

（2）若点 P 在棱 BB_1 上且直线 CP 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$，求 BP 的长.



（第 20 题图）

21．(本小题满分 12 分)

已知直线 l：$y=x+m$ 交抛物线 C：$y^2=4x$ 于 A，B 两点.

（1）设直线 l 与 x 轴的交点为 T. 若 $\overrightarrow{AT}=2\overrightarrow{TB}$，求实数 m 的值；

（2）若点 M，N 在抛物线 C 上，且关于直线 l 对称，求证：A，B，M，N 四点共圆.

22．(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax\sin x-x-1$，$x\in[0，\pi]$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求证：$f(x)\geqslant0$；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.