

南京市 2021 届高三年级第三次模拟考试

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D 2. A 3. C 4. B 5. D 6. B 7. C 8. A

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. BCD 10. AC 11. ACD 12. BD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 270 14. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (答案不唯一) 15. $80\sqrt{3}, (40+8\sqrt{5})\pi$ 16. $\frac{\pi^2}{4}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。

17. (本题满分 10 分)

解：(1) 在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}$,

$$\text{所以 } \sin \angle CAD = \frac{CD \sin \angle ADC}{AC} = \frac{2 \times \sin \frac{2\pi}{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为 $0 < \angle CAD < \frac{\pi}{3}$,

$$\text{因此 } \cos \angle CAD = \sqrt{1 - \sin^2 \angle CAD} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 方法 1

设 $AE = CE = x$, $\angle AEB = \alpha$.

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 中, } 8 + x^2 - 4\sqrt{2}x \cos \alpha = 16. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{在 } \triangle BCE \text{ 中, } 8 + x^2 - 4\sqrt{2}x \cos(\pi - \alpha) = 4, \text{ 即 } 8 + x^2 + 4\sqrt{2}x \cos \alpha = 4. \quad \textcircled{2} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \text{ 相加, 解得 } x = \sqrt{2}, \text{ 即 } AE = CE = \sqrt{2}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{将 } x = \sqrt{2} \text{ 代入 } \textcircled{1}, \text{ 解得 } \cos \alpha = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{因为 } 0 < \alpha < \pi, \text{ 所以 } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABE} = 2 \times \frac{1}{2} AE \times BE \times \sin \alpha$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \sqrt{7}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

方法 2

$$\text{因为 } AE = CE, \text{ 所以 } \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}),$$

两边平方得 $4\overrightarrow{BE}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC$,

即 $32 = 16 + 4 + 2 \times 4 \times 2 \cos \angle ABC$,

得 $\cos \angle ABC = \frac{3}{4}$, 又 $0 < \angle ABC < \pi$,

所以 $\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 8 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \sqrt{7}$ 10 分

18. (本题满分 12 分)

解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

因为 $a_1 + 3, a_3, a_4$ 成等差数列, 所以 $2a_3 = a_1 + 3 + a_4$, 即 $2(a_1 + 2d) = a_1 + 3 + a_1 + 3d$,

解得 $d = 3$, 2 分

因为 a_1, a_3, a_8 成等比数列, 所以 $a_3^2 = a_1 a_8$, 即 $(a_1 + 6)^2 = a_1(a_1 + 21)$,

解得 $a_1 = 4$, 4 分

所以 $a_n = 4 + 3(n - 1) = 3n + 1$ 5 分

(2) 因为 $b_n > 0$, 所以 $\{S_n\}$ 是单调递增数列. 6 分

因为 a_{k+1} 前的所有项的项数为 $k + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = k + 2^{k+1} - 2$,

所以 $S_{k+2^{k+1}-2} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + 2(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k)$

$$= \frac{k(4+3k+1)}{2} + 2 \times \frac{2(1-2^k)}{1-2} = \frac{3k^2+5k}{2} + 2^{k+2} - 4. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

当 $k = 6$ 时, $S_{132} = 321 < 500$; 当 $k = 7$ 时, $S_{261} = 599 > 500$ 10 分

令 $S_{132} + a_7 + 2(n - 133) < 500$, 即 $321 + 22 + 2(n - 133) < 500$, 解得 $n < 211.5$.

所以满足 $S_n < 500$ 的 n 的最大值为 211. 12 分

19. 解: (1) 取 AD 中点 O , 连接 CO, OE .

在梯形 $ABCD$ 中, 因为 $AD \parallel BC, AD = 2BC$,

所以四边形 $ABCO$ 为平行四边形, 所以 $CO \parallel AB$,

所以 $\angle OCE$ 即为异面直线 AB 与 CE 所成的角或补角. 2 分

在等边 $\triangle PAD$ 中, 因为 E 为 PD 的中点, 所以 $OE = \frac{1}{2} PA = \frac{1}{2} AD = 2$.

在 $\triangle OCE$ 中, $OC = AB = 2$, 即 $OE = OC = 2$,

所以 $\angle OCE$ 为锐角, 从而 $\angle OCE = \angle OEC = 45^\circ$,

所以 $\angle COE = 90^\circ$, 即 $OC \perp OE$ 4 分

因为 $\angle ABC = 90^\circ$, 所以四边形 $ABCO$ 为矩形, 所以 $OC \perp AD$.

又 $AD \cap OE = O, AD, OE \subset \text{平面 } PAD$, 所以 $OC \perp \text{平面 } PAD$.

又因为 $OC \subset \text{平面 } ABCD$, 所以平面 $PAD \perp \text{平面 } ABCD$ 6 分

(2)连接 PO , 在等边 $\triangle PAD$ 中, 因为 O 为 AD 中点, 所以 $PO \perp AD$.

由(1)得 $OC \perp$ 平面 PAD , $PO \subset$ 平面 PAD , 所以 $OC \perp PO$.

以 O 为原点, OC, OD, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴,

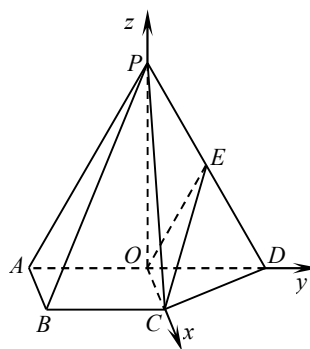
建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $A(0, -2, 0), C(2, 0, 0), D(0, 2, 0), B(2, -2, 0),$

$P(0, 0, 2\sqrt{3}),$

故 $\overrightarrow{AP} = (0, 2, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (2, 0, 0), \overrightarrow{PD} = (0, 2, -2\sqrt{3}),$

$\overrightarrow{CD} = (-2, 2, 0).$



设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 2y + 2\sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 2x = 0, \end{cases}$

不妨取 $z = 1$, 得 $\mathbf{m} = (0, -\sqrt{3}, 1).$ 8 分

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 2y - 2\sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = -2x + 2y = 0, \end{cases}$

不妨取 $z = 1$, 得 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1).$ 10 分

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = -\frac{\sqrt{7}}{7}.$

所以平面 PAB 与平面 PCD 的所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}.$ 12 分

20. (本小题满分 12 分)

解: (1)① $\bar{x} = 55 \times 0.1 + 65 \times 0.2 + 75 \times 0.45 + 85 \times 0.2 + 95 \times 0.05 = 74.$ 2 分

②由(1)得 $\mu = \bar{x} = 74$, 所以 $X \sim N(74, 100),$

得 $P(54 < X < 94) \approx 0.9545, P(64 < X < 84) \approx 0.6827,$ 4 分

所以 $P(54 < X < 64) = \frac{0.9545 - 0.6827}{2} = 0.1359.$ 6 分

(2)记“该同学每局获胜”为事件 A , 则 $P(A) = (0.02 + 0.005) \times 10 = \frac{1}{4}.$ 7 分

Y 的可能取值为 3, 4, 5,

$P(Y=3) = (\frac{1}{4})^3 + (\frac{3}{4})^3 = \frac{7}{16},$ 8 分

$P(Y=4) = C_3^2 \times (\frac{1}{4})^2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + C_3^2 \times (\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{45}{128},$ 9 分

$P(Y=5) = C_4^2 \times (\frac{1}{4})^2 \times (\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{4} + C_4^2 \times (\frac{3}{4})^2 \times (\frac{1}{4})^2 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{128}.$ 10 分

因此 $E(Y) = 3 \times \frac{7}{16} + 4 \times \frac{45}{128} + 5 \times \frac{27}{128} = \frac{483}{128}.$ 12 分

21. (本题满分 12 分)

解: (1) 设 $A(x_1, y_1)$, 则 $AP^2 = (x_1 - 4)^2 + y_1^2 = x_1^2 - 8x_1 + 16 + 4x_1 = x_1^2 - 4x_1 + 16$, 2 分

当 $x_1 = 2$ 时, $(AP^2)_{\min} = 12$, 故 AP 长度的最小值为 $2\sqrt{3}$ 4 分

(2) 由 l 不与 x 轴重合, 故可设直线 $l: x = my + t$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + t, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 4my - 4t = 0,$$

所以 $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1 y_2 = -4t$ 6 分

以 AB 为直径的圆方程为 $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$,

令 $y = 0$, 得 $(x - x_1)(x - x_2) + y_1 y_2 = 0$, 即 $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

设 $M(x_3, y_3)$, $N(x_4, y_4)$.

则 $x_3 x_4 = x_1 x_2 + y_1 y_2$ 8 分

于是 $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = x_3 x_4 = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2 = t^2 - 4t$ 10 分

令 $t^2 - 4t = -4$, 解得 $t = 2$, 此时 $\Delta = 16(m^2 + 2) > 0$,

所以存在 $t = 2$, 使得 $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = -4$ 12 分

22. (本题满分 12 分)

(1) 解: 因为 $f(x) = \frac{a - e^x}{x} + a \ln x$, $x > 0$, 所以 $f'(x) = -\frac{(x-1)(e^x - a)}{x^2}$ 1 分

① 当 $a \leq 1$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$ 2 分

② 当 $1 < a < e$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \ln a$ 或 $x > 1$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $\ln a < x < 1$.

..... 3 分

因此, 当 $a \leq 1$ 时, $f(x)$ 的减区间为 $(1, +\infty)$, 增区间为 $(0, 1)$;

当 $1 < a < e$ 时, $f(x)$ 的减区间为 $(0, \ln a)$ 和 $(1, +\infty)$, 增区间为 $(\ln a, 1)$.

..... 4 分

(2) 证明: 当 $a > e$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $x > \ln a$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $1 < x < \ln a$.

所以 $f(x)$ 的减区间为 $(0, 1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$; 增区间为 $(1, \ln a)$, 6 分

所以当 $x \in (0, \ln a]$ 时, $f(x) \geq f(1) = a - e > 0$, 此时 $f(x)$ 无零点. 7 分

方法 1

下面证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x > \frac{x^3}{3}$.

设 $g(x) = e^x - \frac{x^3}{3}$, $x > 0$, 则 $g'(x) = e^x - x^2$, $g''(x) = e^x - 2x$, $g'''(x) = e^x - 2$.

当 $x \in (0, \ln 2)$, $g'''(x) < 0$, 所以 $g''(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\ln 2, +\infty)$, $g'''(x) > 0$, 所以 $g''(x)$ 单调递增;

因此 $g''(x) \geq g''(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$, 故 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因此 $g'(x) > g'(0) = 1 > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x) > g(0) = 1 > 0$, 即不等式 $e^x > \frac{x^3}{3} (x > 0)$ 得证. 9 分

由于 $x > 0$ 时, 由 $g''(x) > 0$, 知 $e^x > 2x > x$, 故 $\ln e^x > \ln x$, 即 $\ln x < x$ 10 分

因此, 当 $x > \ln a > 1$ 时, $f(x) = \frac{a-e^x}{x} + a \ln x < \frac{a-\frac{1}{3}x^3}{x} + ax = -\frac{1}{3}x^2 + ax + \frac{a}{x} < -\frac{1}{3}x^2 + ax + a$,

令 $-\frac{1}{3}x^2 + ax + a = 0$, 得 $x = \frac{3a + \sqrt{9a^2 + 12a}}{2} = a + \frac{a + \sqrt{9a^2 + 12a}}{2} > \ln a$,

取 $x_0 = \frac{3a + \sqrt{9a^2 + 12a}}{2}$, 则 $f(x_0) < 0$.

又 $f(\ln a) > f(1) > 0$, 且函数 $f(x)$ 在 $[\ln a, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 的图象不间断,

故当 $x \in [\ln a, +\infty)$ 时, $f(x)$ 有且仅有 1 个零点.

综上, 当 $a > e$ 时, 函数 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点. 12 分

方法 2

先证明: $e^x \geq \frac{e^3 x^3}{27} (x > 0)$.

令 $g(x) = e^x - ex$, $x > 0$, 因为 $g'(x) = e^x - e$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 0$,

所以 $g(x) = e^x - ex \geq 0$, 即 $e^x \geq ex$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号.

将 x 换作 $\frac{x}{3}$, 得 $e^{\frac{x}{3}} \geq e \cdot \frac{x}{3}$, 即证得 $e^x \geq \frac{e^3 x^3}{27}$ 9 分

再证明: 当 $x > 0$ 时, $\ln x \leq x - 1$.

令 $h(x) = \ln x - x + 1$, $x > 0$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递减,

所以 $h(x)_{\max} = h(1) = 0$, 故 $h(x) = \ln x - x + 1 \leq 0$,

即证得当 $x > 0$ 时, $\ln x \leq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号. 10 分

当 $x > 1$ 时, 有 $f(x) = \frac{a-e^x}{x} + a \ln x = \frac{a(x \ln x + 1) - e^x}{x} < \frac{a[x(x-1) + x] - \frac{e^3 x^3}{27}}{x} = \frac{ax^2 - \frac{e^3 x^3}{27}}{x}$,

令 $ax^2 - \frac{e^3 x^3}{27} = 0$, 解得 $x = \frac{27a}{e^3}$, 所以 $f(\frac{27a}{e^3}) < 0$.

又 $f(\ln a) > f(1) > 0$, 且 $\ln a < a - 1 < a < \frac{27a}{e^3}$, $f(x)$ 在 $[\ln a, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 的图象不间断,

所以 $f(x)$ 在 $[\ln a, +\infty)$ 上有且仅有 1 个零点.

综上, 当 $a > e$ 时, 函数 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点. 12 分