

卓越高中千校联盟2021 高考终极押题卷

理科数学试题参考答案与评分标准

一、单项选择题答案

1-5:BDCCD

6-10:DDACC

11-12:BC

1.B 【命题意图】求出复数即可知其虚部.

【解题思路】

解: $z(1-i)=i \Rightarrow z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 故虚部为 $\frac{1}{2}$.

故选 B.

2.D 【命题意图】此题考查集合的交集运算及集合的关系, 熟练掌握交集运算及集合的关系是解本题的关键, 根据函数的定义域确定出 A, 得出 A 与 B 的交集及集合的关系.

【解题思路】

解: $A = \{x | x > -3\}$, $B = \{x | x \geq 2\}$, 结合数轴可得 $B \subseteq A$.

故选 D.

3.C 【命题意图】本题主要考查等差数列的通项公式和前 n 项和公式, 属于基础题.

【解题思路】

解: $a_1 = 100$, $S_9 = 1260$, $9 \times 100 + \frac{9 \times 8}{2} \times d = 1260$, $d = 10$, $a_5 = 100 + 10 \times 4 = 140$.

故选 C.

4.C 【命题意图】本题考查互斥事件、相互独立事件同时发生的概率以及 n 次独立重复试验, 属于中档题.

【解题思路】

设甲以 3:0 获胜为事件 A, 甲以 3:1 获胜为事件 B, 则 A, B 互斥, 分别求出 P(A) 和 P(B), 由 $P(A+B) = P(A) + P(B)$ 即可求解.

解: 设甲以 3:0 获胜为事件 A, 甲以 3:1 获胜为事件 B, 则 A, B 互斥.

且 $P(A) = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$, $P(B) = C_3^2 (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$, 所以 $P(A+B) = \frac{8}{27} + \frac{8}{27} = \frac{16}{27}$.

故选 C.

5.D 【命题意图】本题考查了线性回归方程过样本中心的性质, 属于基础题. 计算 $\bar{x}$ 代入回归方程求出 $\bar{y}$, 根据平均数公式列方程解出 t.

【解题思路】

解: $\bar{x} = \frac{3+4+5+6}{4} = 4.5$, $\therefore \bar{y} = 0.7 \times 4.5 + 0.35 = 3.5$, $\therefore \frac{2.5+t+4+4.5}{4} = 3.5$, 解得 $t=3$.

故选 D.

6.D 【命题意图】本题主要考查二项式展开式中系数的求解方法.

【解题思路】

$(1 - \frac{1}{x^2})(1+x)^6$ 展开式中:

若 $(1 - \frac{1}{x^2})$ 提供系数 1, 则 $(1+x)^6$ 提供含有 x^2 的项, 可得展开式中 x^2 的系数: $C_6^2 = 15$

若 $(1-\frac{1}{x^2})$ 提供系数 $-x^{-2}$,则 $(1+x)^6$ 提供含有 x^4 的项,可得展开式中 x^2 的系数: $C_6^4=15$

$$\therefore -15+15=0$$

7.D 【命题意图】本题主要考查指数函数与对数函数的综合应用,属于基础题.根据指数和对数运算计算即可.

【解题思路】

解:设 $\frac{1}{3x} = \frac{1}{4y} = \frac{1}{5z} = t$,所以 $x = \log_3 t, y = \log_4 t, z = \log_5 t$,由已知得 $t > 1$,且 $4x = 4\log_3 t = \log_3 81, 3y = 3\log_4 t = \log_4 64, 2z = 2\log_5 t = \log_5 25$,所以 $2z < 3y < 4x$.

故选 D.

8. A 【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质,考查图象的识别能力、运算求解能力,属于中档题.由图象先求出函数的解析式,再利用正弦型三角函数的性质即可求解.

【解题思路】

解:由图可知点 $P(1, A)$ 为“五点法”作图中的第二点,所以 $\frac{\pi}{4} \times 1 + \varphi = \frac{\pi}{2}$,即 $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

又 $\omega = \frac{\pi}{4}$,所以周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 8$,所以正三角形 PQR 的边长为8,所以 $2A = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8$,

所以 $A = 2\sqrt{3}$,所以 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4})$

由 $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$,得 $\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$,

所以当 $\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,即 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $2\sqrt{3}$.

当 $\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$,即 $x = -\frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $\sqrt{3}$,

所以函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$ 上的值域为 $[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$.

故选 A.

9. C 【命题意图】本题考查了异面直线所成角,正四面体的结构特征,线面的位置关系,属于较难题.取 BD 的中点 E ,连接 AE, CE ,设正四面体 $A-BCD$ 的棱长为2,由余弦定理得

$\angle CAE > \frac{\pi}{4}$, $\angle CAE$ 为直线 AC 与平面 ABD 内所有直线所成角中最小的角,排除 A, B, PQ

不可能与 AE 垂直,所以直线 PQ 与 AC 所成角不可能为 $\frac{\pi}{2}$,排除 D.

【解题思路】

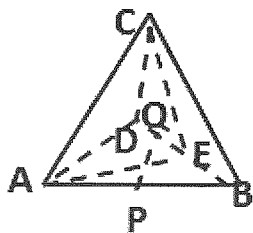
解:取 BD 的中点 E ,连接 AE, CE ,

设正四面体 $A-BCD$ 的棱长为2,则 $AE = CE = \sqrt{3}$,

$$\cos \angle CAE = \frac{4+3-3}{2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以, $\angle CAE > \frac{\pi}{4}$,

由正四面体的结构特征可知 AC 在平面 ABD 上的射影落在直线 AE 上,所以 $\angle CAE$ 为直线 AC 与平面 ABD 内所有直线所成角中最小的角,排除 A, B,不妨设三角形 ABD 的外心为点 O ,则由正四面体的结构特征可知 $OC \perp$ 平面 ABD ,因为 $AE \subset$ 平面 $ABD, PQ \subset$ 平面 ABD 所以 $OC \perp AE, OC \perp PQ$,若 $PQ \perp AC$,则结合 $OC, AC \subset$ 平面 $OAC, OC \cap AC$



$= C$ 可得 $PQ \perp$ 平面 AOC , 因为 $AO \subset$ 平面 OAC , 所以 $PQ \perp AO$, 而在平面 ABD 中, PQ 不可能与 AE 垂直, 所以直线 PQ 与 AC 所成角不可能为 $\frac{\pi}{2}$, 排除 D .

故选 C .

10. **C** 【命题意图】本题考查抛物线的标准方程, 直线与抛物线的位置关系, 抛物线的焦点弦的性质及基本不等式的应用, 考查转化思想, 属于中档题. 设抛物线的标准方程, 将点代入抛物线方程, 求得抛物线方程, 由抛物线的焦点弦性质, 求得 $\frac{1}{|PF|} + \frac{1}{|QF|} = \frac{1}{3}$, 根据抛物线的性质及基本不等式, 即可求得答案.

【解题思路】

解: 设抛物线的方程: $y^2 = 2px (p > 0)$, 焦点为 F , 则 $36 = 2p \times 3$, 则 $2p = 12$,
 $\therefore$ 抛物线的标准方程: $y^2 = 12x$, 焦点坐标 $F(3, 0)$, 准线方程为 $x = -3$,

圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 的圆心为 $(3, 0)$, 半径为 1 ,

由直线 PQ 过圆的圆心即抛物线的焦点,

可设直线 l 的方程为: $my = x - 3$, 设 P, Q 坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ,

由 $\begin{cases} y^2 = 12x \\ my = x - 3 \end{cases}$ 联立, 得 $y^2 - 12my - 36 = 0$,

$\Delta = 144m^2 + 144 > 0$ 恒成立, 由韦达定理得: $y_1 + y_2 = 12m, y_1 \cdot y_2 = -36$,

$\therefore x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 6 = 12m^2 + 6, x_1 \cdot x_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{12 \times 12} = 9$,

$\therefore \frac{1}{|PF|} + \frac{1}{|QF|} = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3} = \frac{12m^2 + 6 + 6}{9 + 3(12m^2 + 6) + 9} = \frac{1}{3}$,

则 $|PN| + 3|QM| = |PF| + 1 + 3(|QF| + 1) = |PF| + 3|QF| + 4$

$= 3(|PF| + 3|QF|) \left(\frac{1}{|PF|} + \frac{1}{|QF|} \right) + 4$

$= 3 \left(4 + \frac{3|QF|}{|PF|} + \frac{|PF|}{|QF|} \right) + 4 \geq 3(4 + 2\sqrt{3}) + 4 = 16 + 6\sqrt{3}$.

当且仅当 $|PF| = \sqrt{3}|QF| \Rightarrow x_1 + 3 = \sqrt{3}(x_2 + 3)$ 时等号成立.

故选 C .

11. **B** 【命题意图】本题考查了函数模型的应用、利用导数研究闭区间上函数的最值和抛物线的标准方程, 属于较难题. 建立平面直角坐标系, 设抛物线的方程为 $x^2 = 2py (p > 0)$, 由点 A 得出抛物线的方程, 要使所填充的混凝土量最小, 则如图内接等腰梯形 $ABCD$ 的面积要最大, 设点 $C(t, \frac{4}{9}t^2) (0 < t < \frac{3}{2})$, 得出此时梯形 $ABCD$ 的面积, 利用导数研究最大值即可.

【解题思路】

解: 建立如图所示的平面直角坐标系, 则 $A(-\frac{3}{2}, 1)$.

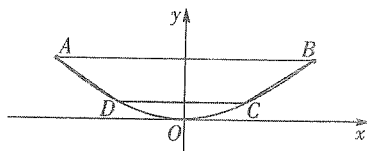
设抛物线的方程为 $x^2 = 2py (p > 0)$, 由于点 A 在抛物线上,

得 $p = \frac{9}{8}$, 所以抛物线的方程为 $y = \frac{4}{9}x^2$.

要使所填充的混凝土量最小, 则如图内接等腰梯形 $ABCD$ 的面积要最大,

设点 $C(t, \frac{4}{9}t^2) (0 < t < \frac{3}{2})$, 则此时梯形 $ABCD$ 的面积

$S(t) = \frac{1}{2}(2t + 3)(1 - \frac{4}{9}t^2) = -\frac{4}{9}t^3 - \frac{2}{3}t^2 + t + \frac{3}{2}$,



所以 $S'(t) = -\frac{4}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + 1 = -\frac{1}{3}(2t+3)(2t-1)$,

又 $0 < t < \frac{3}{2}$, 令 $S'(t) = 0$, 解得 $t = \frac{1}{2}$.

当 $0 < t < \frac{1}{2}$ 时, $S'(t) > 0$, $S(t)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增,

当 $\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}$ 时, $S'(t) < 0$, $S(t)$ 在 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 上单调递减,

所以当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $S(t)$ 取得最大值, 此时新水渠的底宽 CD 为 1 m.

故选 B.

12. C 【命题意图】本题考查函数的零点与方程根的关系, 利用导数研究函数的单调性与极值, 函数图象的应用, 属于中档题.

由 $f(x) = e^x - ax^2 = 0$, 得 $a = \frac{e^x}{x^2}$, 令 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 问题转化为 $y = a$ 与 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 有三个交点, 利用导数研究 $g(x)$ 的单调性与极值, 作出 $g(x)$ 的图象, 由图可得结论.

【解题思路】

解: $x = 0$ 时, $f(0) = 1 \neq 0$, 令 $f(x) = e^x - ax^2 = 0$, 得 $a = \frac{e^x}{x^2}$,

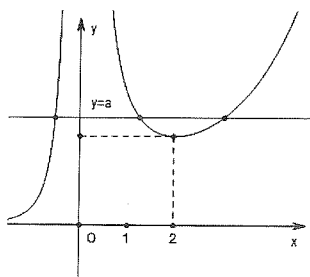
令 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 则问题转化为 $y = a$ 与 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 有三个交点,

$\therefore g'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 2$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 单调递增,

当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减,

$g(x)$ 在 $x = 2$ 处取极小值, $g(2) = \frac{e^2}{4}$, 作出 $g(x)$ 的图象如下:



要使直线 $y = a$ 与曲线 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 有三个交点, 则 $a > \frac{e^2}{4}$,

故实数 a 的取值范围是 $(\frac{e^2}{4}, +\infty)$.

故选 C.

二、填空题

13. $\{m | m < 8 \text{ 且 } m \neq -\frac{1}{2}\}$

【命题意图】考查向量夹角的判断方法.

【解题思路】

解析: $\because \vec{a}, \vec{b}$ 两向量夹角为锐角, $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角不为 0

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot m + 4 \times 2 > 0$, 当 $m = -\frac{1}{2}$ 时, $\vec{a}, \vec{b}$ 两向量夹角为 0

$\therefore m < 8$ 且 $m \neq -\frac{1}{2}$

14. 375

【命题意图】本题考查了正态分布和二项分布的知识点,属于基础题.先求部件正常工作超过 10000 小时的概率,再由二项分布即可求平均值.

【解题思路】

解:由正态分布可知,每个原件正常工作超过 10000 个小时的概率为 $\frac{1}{2}$,则部件正常工作超过 10000 小时的概率为 $[1 - (\frac{1}{2})^2] \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$,又 10000 台仪器的该部件工作服从二项分布,所以平均值为 $1000 \times \frac{3}{8} = 375$ 台.

故答案为 375.

15. $\frac{25}{4}$

【命题意图】本题考查的知识要点:线面垂直的判定和性质的应用,球与锥体之间的关系,勾股定理的应用,主要考查学生的运算能力和转换能力及思维能力,属于中档题.首先求出线面的垂直,进一步求出球心的位置,最后利用勾股定理的应用求出结果.

【解题思路】

解:在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 8, BC = 6, AC = 10$, 所以 $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $\therefore AB \perp BC$, 取 AC 中点 D , 则 $BD = AD$, 又 P 为 $\triangle ABC$ 外一点, 满足 $PA = PB = PC = 5\sqrt{5}$, $\therefore PD \perp AC$, 则 $PD \perp$ 平面 ABC , 球心 O 为 PD 上一点, 所以 $PD = \sqrt{(PA)^2 - (AD)^2} = 10$,

设球的半径为 R , 所以 $R^2 = 5^2 + (10 - R)^2$, 解得: $R = \frac{25}{4}$.

故答案为 $\frac{25}{4}$.

16. $\frac{(2n+1) \cdot 3^n - 1}{4}$

【命题意图】本题考查数列的递推关系,错位相减法求数列的和,等差数列的概念及通项公式.根据条件得到 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3}$, 则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项 $\frac{1}{a_1} = \frac{2}{3}$, 公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列, 得到 $\frac{1}{a_n}$, 则可得 c_n , 写出 $c_1 + c_2 + \dots + c_n$, 利用错位相减法可求解.

【解题思路】

解: 因为 $a_1 = \frac{3}{2}, a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 3}$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{3a_n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{a_n}$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3}$,

所以数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项 $\frac{1}{a_1} = \frac{2}{3}$, 公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列, 所以 $\frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+1}{3}$,

则 $c_n = \frac{3^n}{a_n} = (n+1)3^{n-1}$,

则 $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 2 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + 4 \times 3^2 + \dots + (n+1) \times 3^{n-1}$,

设 $T = 2 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + 4 \times 3^2 + \dots + (n+1) \times 3^{n-1}$ ①,

$$\begin{aligned}
 &\text{则 } 3T = 2 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + 4 \times 3^3 + \dots + (n+1) \times 3^n \text{ ②,} \\
 &\text{①-②可得 } -2T = 2 \times 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} - (n+1) \times 3^n \\
 &= 2 + \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} - (n+1) \times 3^n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + n\right) \times 3^n, \\
 &\text{则 } T = \frac{(2n+1) \cdot 3^n - 1}{4}, \text{ 即 } c_1 + c_2 + \dots + c_n = \frac{(2n+1) \cdot 3^n - 1}{4} \\
 &\text{故答案为 } \frac{(2n+1) \cdot 3^n - 1}{4}.
 \end{aligned}$$

三、解答题

17.【命题意图】考查解三角形的余弦定理公式的使用,余弦定理公式与基本不等式的综合应用,第二问考查学生通过角的范围求三角函数的值域的能力.

【解题思路】

解:(1)由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, 且 $a^2 + b^2 = c^2 + \sqrt{3}ab$,

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}ab}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\because 0 < C < \pi,$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{6};$$

$$(2) \text{由正弦定理可得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

$$\therefore a = 2\sin A, b = 2\sin B,$$

$$\text{由(1)得 } A+B = \frac{5\pi}{6}, \text{ 即 } B = \frac{5\pi}{6} - A,$$

$$\therefore \sqrt{3}a - b = 2\sqrt{3}\sin A - 2\sin B = 2\sqrt{3}\sin A - 2\sin\left(\frac{5\pi}{6} - A\right)$$

$$= \sqrt{3}\sin A - \cos A = 2\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right),$$

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

$$\begin{cases} 0 < \frac{5\pi}{6} - A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < A < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ 解得: } \frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < A - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \sqrt{3}a - b \text{ 的取值范围为 } (1, \sqrt{3}).$$

18.【命题意图】第一问考查空间中的面与面垂直的证明的基本方法,第二问考查利用空间向量解决二面角的问题,在圆锥体的适当位置建立坐标系,考查学生空间几何的基本能力.

【解题思路】

解:(1)证明: $\because SO$ 垂直于圆锥的底面, $AP \subset$ 底面,

$$\therefore SO \perp AP,$$

$$\because AO \text{ 为 } \odot M \text{ 的直径},$$

$$\therefore PO \perp AP,$$

又 $SO \cap OP = O, SO, OP \subset \text{平面 } SOP$,

$\therefore AP \perp \text{平面 } SOP$,

$\therefore APC \subset \text{平面 } SAP$,

$\therefore \text{平面 } SAP \perp \text{平面 } SOP$.

(2)解:设圆锥的母线长为 l , 底面半径为 r ,

$\therefore$ 圆锥的侧面积 $S_{\text{侧}} = \pi l r$, 底面积 $S_{\text{底}} = \pi r^2$,

$\therefore$ 依题意 $2\pi r^2 = \pi l r$,

$\therefore l = 2r$,

取 $r = 2, l = 4$, 则在 $\triangle ABS$ 中, $AB = AS = BS = 4$,

$\therefore SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = 2\sqrt{3}$,

如图, 在底面作 $\odot O$ 的半径 OC , 使得 $OA \perp OC$,

$\therefore SO \perp OA, SO \perp OC$,

$\therefore$ 以 O 为原点, OA 为 x 轴, OC 为 y 轴, OS 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

$A(2, 0, 0), B(-2, 0, 0), S(0, 0, 2\sqrt{3})$,

在三棱锥 $S-APO$ 中, $\therefore SO = 2\sqrt{3}$,

$\therefore \triangle AOP$ 面积最大时, 三棱锥 $S-APO$ 的体积最大, 此时 $MP \perp OA$,

$\therefore \odot M$ 的半径为 1,

$\therefore P(1, 1, 0)$,

$\overrightarrow{AP} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{BP} = (3, 1, 0), \overrightarrow{SP} = (1, 1, -2\sqrt{3})$,

设平面 SAP 的法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = -a + b = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{SP} = a + b - 2\sqrt{3}c = 0 \end{cases},$$

取 $a = 1$, 得 $\vec{n} = (1, 1, \frac{\sqrt{3}}{3})$,

设平面 SBP 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BP} = 3x + y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{SP} = x + y - 2\sqrt{3}z = 0 \end{cases},$$

取 $x = -1$, 得 $\vec{m} = (-1, 3, \frac{\sqrt{3}}{3})$,

设二面角 $A-SP-B$ 的平面角为 θ , 由图得 θ 为钝角,

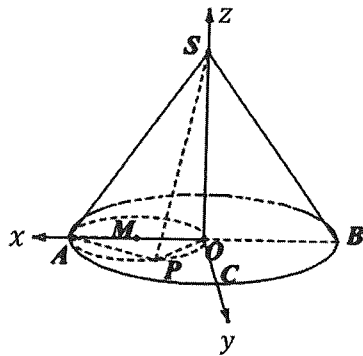
$$\therefore \cos \theta = -\frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = -\frac{|-1+3+\frac{1}{3}|}{\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{\frac{31}{3}}} = -\frac{\sqrt{217}}{31},$$

$\therefore$ 二面角 $A-SP-B$ 的余弦值 $-\frac{\sqrt{217}}{31}$.

19. 【命题意图】考查学生识别条形直方图的能力; 第二问考察独立性检验的基本分析方法; 第三问考察概率分布列的基本分析方法。

【解题思路】

解: (1) 平均数 $\bar{x} = (0.02 \times 1 + 0.08 \times 3 + 0.15 \times 5 + 0.18 \times 7 + 0.03 \times 9 + 0.03 \times 11 +$



$0.01 \times 13) \times 2 = 6$, 这 500 名患者中“长潜伏者”的频率为 $(0.18 + 0.03 + 0.03 + 0.01) \times 2 = 0.5$, 所以“长潜伏者”的人数为 $500 \times 0.5 = 250$ 人.

(2) 由题意补充后的列联表如下,

	短潜伏者	长潜伏者	合计
60 岁及以上	90	70	160
60 岁以下	60	80	140
合计	150	150	300

则 K^2 的观测值为 $k = \frac{300 \times (90 \times 80 - 60 \times 70)^2}{150 \times 150 \times 160 \times 140} = \frac{75}{14} \approx 5.357 > 5.024$,

经查表, 得 $P(K^2 \geq 5.024) \approx 0.025$, 所以有 97.5% 的把握认为潜伏期长短与年龄有关.

(3) 由题意知, 所需要的试验费用 X 所有可能的取值为 1000, 1500, 2000,

$$P(X = 1000) = \frac{A_2^2}{A_5^2} = \frac{1}{10},$$

$$P(X = 1500) = \frac{C_2^1 C_3^1 A_2^2 + A_3^3}{A_5^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X = 2000) = \frac{C_2^1 A_3^1 A_3^1 C_2^1}{A_5^4} = \frac{3}{5} \text{ (或 } P(X = 2000) = \frac{C_2^1 C_3^1 A_3^2}{A_5^3} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5} \text{)},$$

所以 X 的分布列为

X	1000	1500	2000
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 1000 \times \frac{1}{10} + 1500 \times \frac{3}{10} + 2000 \times \frac{3}{5} = 1750 \text{ (元)}.$$

20.【命题意图】第一问考查解析几何椭圆标准方程的求解方法; 第二问考查圆锥曲线中椭圆与直线方程求解过程中设而不求的解题思想, 重点考查学生的计算能力.

【解题思路】

解: (1) 由已知可得: $a = 2$, $\therefore$ 点 $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆上,

$$\therefore \frac{1}{4} + \frac{3}{4b^2} = 1, \therefore b^2 = 1, \therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1;$$

$$(2) \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 由 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得: } (1 + 4k^2)x^2 + 8mkx + 4(m^2 - 1) = 0,$$

$$\Delta = 64m^2k^2 - 16(1 + 4k^2)(m^2 - 1) > 0, \text{ 即得 } 1 + 4k^2 - m^2 > 0 \text{ 且 } x_1 + x_2 = -\frac{8mk}{1 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{4(m^2 - 1)}{1 + 4k^2},$$

因为直线 OM, ON 的斜率之积等于 $-\frac{1}{4}$,

$$\frac{y_1y_2}{x_1x_2} = \frac{(kx_1 + m)(kx_2 + m)}{x_1x_2} = \frac{km(-8mk) + 4k^2(m^2 - 1) + m^2(1 + 4k^2)}{x_1x_2} = -\frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{km(-8mk) + 4k^2(m^2-1) + m^2(1+4k^2)}{x_1x_2} = \frac{m^2-4k^2}{4(m^2-1)} = -\frac{1}{4},$$

$$\text{即得 } 2m^2 = 4k^2 + 1. \text{ 又 } O \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离为 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$|MN| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\frac{16k^2+8}{m^2} - 8},$$

$$\text{即得 } S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} |MN| d = \frac{1}{2} \sqrt{16k^2+8-8m^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16k^2+8-4(4k^2+1)} = 1 (\text{定值}),$$

所以 $\triangle OMN$ 的面积为定值.

21.【命题意图】 本题考查导函数的基本分析方法, 第一问求解经过函数图像上某点的切线方程; 第二问则是求解参数范围的常见参变分离形式; 第三问则考查使用构造函数分析极值点偏移的问题.

【解题思路】

解: (1) 因为函数 $f(x) = x \ln x$ 定义域为 $(0, +\infty)$

$$\text{所以 } f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(1) = \ln 1 + 1 = 1.$$

又因为 $f(1) = 0$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(2) 当 $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ 时, “ $f(x) \leq ax - 1$ ”等价于 “ $a \geq \ln x + \frac{1}{x}$ ”恒成立,

$$\text{令 } g(x) = \ln x + \frac{1}{x}, x \in [\frac{1}{e}, e],$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, x \in [\frac{1}{e}, e].$$

当 $x \in [\frac{1}{e}, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e}, 1)$ 单调递减.

当 $x \in (1, e]$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在区间 $(1, e]$ 单调递增.

$$\text{而 } g(\frac{1}{e}) = -\ln e + e = e - 1 > 1.5, g(e) = 1 + \frac{1}{e} < 1.5,$$

所以 $g(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的最大值为 $g(\frac{1}{e}) = e - 1$.

所以当 $a \geq e - 1$ 时, 对于任意 $x \in [\frac{1}{e}, e]$, 都有 $f(x) \leq ax - 1$.

(3) 函数 $f(x) = x \ln x$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

由 (1) 可知, $f'(x) = \ln x + 1$.

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{e}.$$

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的情况如下:

x	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	减函数	极小值	增函数

故 $f(x)$ 的增区间为 $(\frac{1}{e}, +\infty)$, 减区间为 $(0, \frac{1}{e})$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = 0$$

$x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $f(x)$ 为减函数

$\therefore x \in (0, \frac{1}{e})$, $f'(x) < 0$

$x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $f(x)$ 为增函数

$$\text{又 } f(1) = 0$$

$\therefore x \in (\frac{1}{e}, 1)$ 时, $f(x) < 0$

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$

$\therefore y = m$ 与 $f(x)$ 的图像交于 A, B 两点, 即 $f(x_1) = f(x_2) = m$

$$\therefore 0 < x_1 < \frac{1}{e} < x_2 < 1$$

$$\text{设 } g(x) = f(\frac{1}{e} \times 2 - x)$$

$$\text{当 } x \in (\frac{1}{e}, \frac{2}{e}) \text{ 时, } g(x) = (\frac{2}{e} - x) \cdot \ln(\frac{2}{e} - x)$$

$$\therefore \text{设 } h(x) = g(x) - f(x)$$

$$h(x) = (\frac{2}{e} - x) \cdot \ln(\frac{2}{e} - x) - x \cdot \ln x$$

$$\therefore h'(x) = (\frac{2}{e} - x)' \cdot \ln(\frac{2}{e} - x) + (\frac{2}{e} - x) \cdot [\ln(\frac{2}{e} - x)]' - \ln x - 1$$

$$= -\ln(\frac{2}{e} - x) + (\frac{2}{e} - x) \cdot \frac{1}{\frac{2}{e} - x} \cdot (-1) - \ln x - 1$$

$$= -2 - \ln(-x^2 + \frac{2}{e}x)$$

$$\therefore x \in (\frac{1}{e}, \frac{2}{e})$$

$$\therefore -x^2 + \frac{2}{e}x \in (0, \frac{1}{e^2})$$

$$\therefore \ln(-x^2 + \frac{2}{e}x) < -2$$

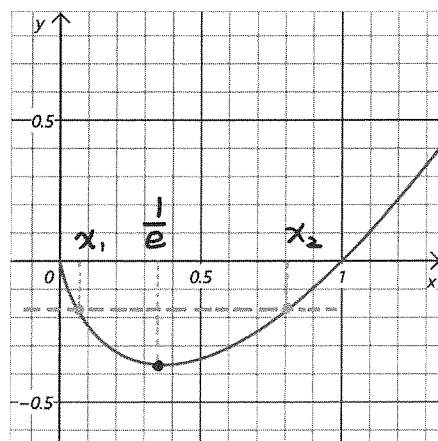
$\therefore h'(x) > 0$ 即当 $x \in (\frac{1}{e}, \frac{2}{e})$ 时, $h(x)$ 为增函数

$\therefore h(x) > 0$ 即当 $x \in (\frac{1}{e}, \frac{2}{e})$ 时

$$g(x) = (\frac{2}{e} - x) \cdot \ln(\frac{2}{e} - x) > f(x) = x \ln x$$

$$\therefore f(x_1) = f(x_2)$$

此时 $0 < x_1 < \frac{1}{e} < x_2 < 1$



$$\therefore f(x_1) = g\left(\frac{2}{e} - x_1\right) = f(x_2)$$

当 $0 < x_1 < \frac{1}{e}$ 时, 可得 $\frac{1}{e} < \frac{2}{e} - x_1 < \frac{2}{e}$

$$\text{记 } \frac{2}{e} - x_1 = t$$

$$\text{即 } \frac{1}{e} < t < \frac{2}{e}$$

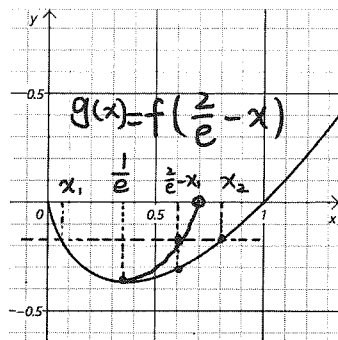
由当 $x \in \left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right)$ 时, $g(x) = \left(\frac{2}{e} - x\right) \cdot \ln\left(\frac{2}{e} - x\right) > f(x) = x \ln x$

$$g(t) > f(t) \text{ 即 } f\left(\frac{2}{e} - x_1\right) < g\left(\frac{2}{e} - x_1\right) = f(x_1) = f(x_2)$$

$$\therefore f\left(\frac{2}{e} - x_1\right) < f(x_2) \text{ 此时 } \frac{1}{e} < \frac{2}{e} - x_1, \frac{1}{e} < x_2$$

又当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $f(x)$ 为增函数, $\therefore f\left(\frac{2}{e} - x_1\right) < f(x_2)$ 可得 $\frac{2}{e} - x_1 < x_2$

$$\therefore x_1 + x_2 > \frac{2}{e}$$



22. 【命题意图】考查对直角坐标方程、极坐标方程、参数方程的相互转换的方法

【解题思路】

解: (1) 曲线 C_1 参数方程为: $\begin{cases} x = 4\cos^2\theta \\ y = 4\sin^2\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 转换为直角坐标方程为: $x + y - 4 = 0$,

所以 C_1 的普通方程为 $x + y = 4$ ($0 \leq x \leq 4$).

$$\text{曲线 } C_2 \text{ 的参数方程: } \begin{cases} x = t + \frac{1}{t}, ① \\ y = t - \frac{1}{t}, ② \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

所以 $①^2 - ②^2$ 整理得直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$,

所以 C_2 的普通方程为 $x^2 - y^2 = 4$.

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 整理得 } \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ 即 } P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

设圆的方程 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, 由于圆经过点 P 和原点,

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 = r^2 \\ \left(\frac{5}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = r^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{17}{10} \\ r^2 = \frac{289}{100} \end{cases},$$

故圆的方程为: $\left(x - \frac{17}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{289}{100}$, 即 $x^2 + y^2 - \frac{17}{5}x = 0$, 转换为极坐标方程为 $\rho = \frac{17}{5}$

$\cos\theta$.

23. 【命题意图】第一问考查含有参数的绝对值不等式的分类讨论的求解方法; 第二问考查

对柯西不等式的构造及运用

【解题思路】

解:(1)分类讨论

当 $m < 0$ 时,不等式显然成立

当 $m \geq 0$ 时,分类讨论

① $0 \leq m < 4$ 时

$$|x-4| + |x-m| \geq 4-m$$

$$4-m \geq 2m$$

$$\text{解得: } 0 \leq m \leq \frac{4}{3}$$

② $m = 4$ 时

$$|x-4| + |x-m| \geq 4-m=0$$

解得: $m \in \phi$

③ $m > 4$ 时

$$|x-4| + |x-m| \geq m-4$$

$$m-4 \geq 2m$$

解得: $m \in \phi$

综上所述, $m \leq \frac{4}{3}$

$\therefore m$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$;

(2)证明: $\because \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = 1 (a, b, c > 0)$.

$\therefore$ 由柯西不等式得:

$$3 = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{2b} \cdot \frac{1}{\sqrt{2b}} + \sqrt{3c} \cdot \frac{1}{\sqrt{3c}} \leq \sqrt{a+2b+3c} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c}}.$$

整理得 $a+2b+3c \geq 9$.

当且仅当 $a=2b=3c$, 即 $a=3, b=\frac{3}{2}, c=1$ 时取等号.

卓越高中千校联盟2021 高考终极押题卷

理科数学学科命题双向细目表

序号	分值	考点	能力	预计难度
1	5	复数	求出复数即可知其虚部	0.7
2	5	集合的交集运算及集合的关系;函数的定义域	掌握交集运算及集合的关系	0.65
3	5	等差数列的通项公式和前 n 项和公式	运用等差数列公式	0.65
4	5	互斥事件、相互独立事件同时发生的概率以及 n 次独立重复试验	数学建模能力	0.5
5	5	线性回归方程	线性回归方程过样本中心的性质进行求解	0.7
6	5	考查二项式展开式中系数的求解方法	二项式展开式中系数的求解方法	0.65
7	5	指数函数与对数函数的综合应用	指数和对数运算计算	0.55
8	5	三角函数的图象与性质	考查图象的识别能力、运算求解能力	0.5
9	5	正四面体的结构特征、线面的位置关系	考查了求异面直线所成角	0.3
10	5	抛物线的焦点弦的性质及基本不等式的应用	考查转化思想	0.35
11	5	函数的最值和抛物线的标准方程	函数模型的应用、利用导数研究闭区间上	0.2
12	5	函数的零点与方程根的关系	利用导数研究函数的单调性与极值	0.4
13	5	向量夹角的判断方法	向量夹角的判断方法	0.65
14	5	正态分布的性质及其应用、二项分布	考查学生对基础概念的理解和计算能力	0.5
15	5	线面垂直的判定和性质的应用 球与锥体之间的关系	考查学生的运算能力和转换能力及思维能力	0.5
16	5	数列的递推关系 等差数列的概念及通项公式	错位相减法求数列的和	0.45
17	12	解三角形的余弦定理公式、角的范围影响三角函数取值	三角函数中的函数转换思想	0.5
18	12	面与面垂直的证明的基本方法 利用空间向量解决二面角的问题	空间几何的基本能力	0.55
19	12	学生识别条形直方图的能力,独立性检验的分析方法析 概率分布列的基本分析方法	统计图识图、独立性检验的公式运用、概率分布列的基本分析方法	0.55
20	12	解析几何椭圆的标准方程的求解方法	求解过程中设而不求的解题思想与计算能力	0.35
21	12	导函数的基本分析方法、极值点偏移的分析方法	常见参变分离求范围、构造函数的分析方法	0.2
22	10	极坐标与参数方程	直角坐标方程、极坐标方程、 参数方程的相互转换的方法	0.55
23	10	含有参数的绝对值不等式 柯西不等式	解不等式的基本能力 分类讨论思想	0.55