

卓越高中千校联盟 2021 高考终极押题卷

理科数学

(考试时间:120 分钟;试卷满分:150 分)



扫码了解更多升学信息

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 复数 z 满足 $z(1-i) = i$ (i 为虚数单位),则 z 的虚部为()
A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}i$ D. $-\frac{1}{2}i$
- 已知集合 $A = \{x|y = \ln(x+3)\}$, $B = \{x|x \geq 2\}$,则下列结论正确的是()
A. $A = B$ B. $A \cap B = \emptyset$ C. $A \subseteq B$ D. $B \subseteq A$
- 我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题:“今有善走男,日增等里,首日行走一百里,九日共行一千二百六十里,问日增几何?”该问题中善走男第 5 日所走的路程是()
A. 10 B. 100 C. 140 D. 600
- 围棋起源于中国,据先秦典籍《世本》记载:“尧造围棋,丹朱善之”,至今已有四千多年历史。围棋不仅能抒发意境、陶冶情操、修身养性、生慧增智,而且还与天象易理、兵法策略、治国安邦等相关联,蕴含着中华文化的丰富内涵。在某次国际围棋比赛中,甲、乙两人进入最后决赛。比赛采取五局三胜制,即先胜三局的一方获得比赛冠军,比赛结束。假设每局比赛甲胜乙的概率都为 $\frac{2}{3}$,且各局比赛的胜负互不影响,则在不超过 4 局的比赛中甲获得冠军的概率为()
A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{8}{27}$ C. $\frac{16}{27}$ D. $\frac{17}{81}$
- 如表中数据,已知其线性回归方程为 $\hat{y} = 0.7x + 0.35$,则 t 等于()

x	3	4	5	6
y	2.5	t	4	4.5

- 4.5 B. 3.5 C. 3.15 D. 3
- $(1 - \frac{1}{x^2})(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为()
A. 15 B. 20 C. 30 D. 0
- 设正数 x, y, z 满足 $\frac{1}{3x} = \frac{1}{4y} = \frac{1}{5z}$,则下列关系中正确的是()
A. $4x < 3y < 2z$ B. $2z < 4x < 3y$ C. $3y < 2z < 4x$ D. $2z < 3y < 4x$
- 已知函数 $f(x) = A \sin(\frac{\pi}{4}x + \varphi)$ ($A > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示,其中 Q, R 是与函数 $f(x)$ 的极大值 P 相邻的两个极小值点,且 $\triangle PQR$ 为正三角形,则函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$ 上的值域为()

A. $[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

B. $[\frac{1}{2}, 1]$

C. $[\frac{1}{2}, 2\sqrt{3}]$

D. $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

- 在正四面体 $A-BCD$ 中, P 是 AB 的中点, Q 是直线 BD 的动点,则直线 PQ 与 AC 所成角可能为()

A. $\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{5\pi}{12}$

D. $\frac{\pi}{2}$

- 如图,已知抛物线 C_1 的顶点在坐标原点,焦点在 x 轴上,且过点 $(3, 6)$,圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$,过圆心 C_2 的直线 l 与抛物线和圆分别交于 P, Q, M, N ,则 $|PN| + 3|QM|$ 的最小值为()

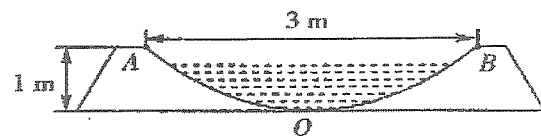
A. $12 + 4\sqrt{3}$

B. $16 + 4\sqrt{3}$

C. $16 + 6\sqrt{3}$

D. $20 + 6\sqrt{3}$

- 某市在精准扶贫专项工作中,通过实施农村农田水利项目,以夯实农村农业的发展基础,助力脱贫攻坚。现计划对该村旧的灌溉水渠进行加固改造,已知旧水渠的横截面是一段抛物线弧 AOB (如图所示),顶点 O 在水渠的最底端,渠宽 AB 为 3 m,渠深为 1 m,欲在旧水渠内填充混凝土加固,改造成横截面为等腰梯形的新水渠,且新水渠底面与地面平行(不改变渠宽),若要使所填充的混凝土量最小,则新水渠的底宽为()



A. $\frac{2}{3}$ m

B. 1 m

C. $\frac{4}{3}$ m

D. 2 m

- 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$ ($x \in \mathbb{R}$) 有三个不同的零点,则实数 a 的取值范围是()

A. $(\frac{e}{4}, +\infty)$

B. $(\frac{e}{2}, +\infty)$

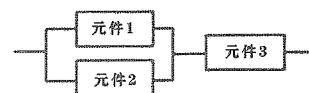
C. $(\frac{e^2}{4}, +\infty)$

D. $(\frac{e^2}{2}, +\infty)$

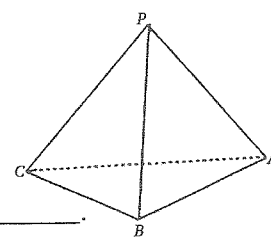
二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

- 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 两向量夹角为锐角, $\vec{a} = (-1, 4)$, $\vec{b} = (m, 2)$,求 m 的取值范围 _____。

- 某科技公司生产一批同型号的光纤通讯仪器,每台仪器的某一部件由三个电子元件按如图方式连接而成,若元件 1 或元件 2 正常工作,且元件 3 正常工作,则该部件正常工作。由大数据统计显示:三个电子元件的使用寿命(单位:小时)均服从正态分布 $N(10000, 10^2)$,且各个元件能否正常工作相互独立。现从这批仪器中随机抽取 1000 台检测该部件的工作情况(各部件能否正常工作相互独立),那么这 1000 台仪器中该部件的使用寿命超过 10000 小时的平均值为 _____ 台。



- 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 8, BC = 6, AC = 10$, P 为 $\triangle ABC$ 平面外一点(如图),满足 $PA = PB = PC = 5\sqrt{5}$,则三棱锥的外接球的半径为 _____。



- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 3}$,若 $c_n = \frac{3^n}{a_n}$,则 $c_1 + c_2 + \dots + c_n =$ _____。

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

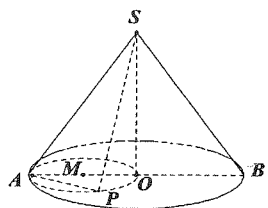
(一)必考题:共 60 分。

- (12 分)在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 且 $a^2 + b^2 = c^2 + \sqrt{3}ab$ 。

- (1)求角 C 的值;
(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,且 $c = 1$,求 $\sqrt{3}a - b$ 的取值范围.

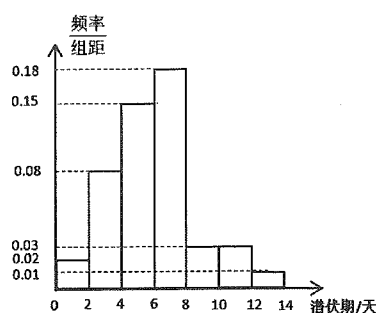
18. (12分)如图所示,圆锥的底面圆半径为 2,圆锥的侧面积是底面积的 2 倍,线段 AB 为圆锥底面 $\odot O$ 的直径,在底面内以线段 AO 为直径作 $\odot M$,点 P 为 $\odot M$ 上异于点 A, O 的动点.

- (1)证明:平面 $SAP \perp$ 平面 SOP ;
(2)当三棱锥 $S - APO$ 的体积最大时,求二面角 $A - SP - B$ 的余弦值.



19. (12分)目前,新冠病毒引发的肺炎疫情在全球肆虐,为了解新冠肺炎传播途径,采取有效防控措施,某医院组织专家统计了该地区 500 名患者新冠病毒潜伏期的相关信息,数据经过汇总整理得到如图所示的频率分布直方图(用频率作为概率).潜伏期不高于平均数的患者,称为“短潜伏者”,潜伏期高于平均数的患者,称为“长潜伏者”.

- (1)求这 500 名患者潜伏期的平均数(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表),并计算出这 500 名患者中“长潜伏者”的人数;
(2)为研究潜伏期与患者年龄的关系,以潜伏期是否高于平均数为标准进行分层抽样,从上述 500 名患者中抽取 300 人,得到如下列联表,请将列联表补充完整,并根据列联表判断是否有 97.5% 的把握认为潜伏期长短与患者年龄有关:



	短潜伏者	长潜伏者	合计
60 岁及以上	90		
60 岁以下			140
合计			300

- (3)研究发现,有 5 种药物对新冠病毒有一定的抑制作用,其中有 2 种特别有效,现在要通过逐一试验直到把这 2 种特别有效的药物找出来为止,每一次试验花费的费用是 500 元,设所需要的试验费用为 X ,求 X 的分布列与数学期望 X .

附表及公式:

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20. (12分)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,且椭圆 C 上的点 $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 到 F_1, F_2 两点的距离之和为 4.

- (1)求椭圆 C 的方程;
(2)若直线 $y = kx + m$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, O 为坐标原点,直线 OM, ON 的斜率之积等于 $-\frac{1}{4}$,试探求 $\triangle OMN$ 的面积是否为定值,并说明理由.

21. (12分)已知函数 $f(x) = x \ln(x)$.

- (1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
(2)若对于 $\forall x \in [\frac{1}{e}, e]$, 都有 $f(x) \leq ax - 1$, 求实数 a 的取值范围;
(3)若 $f(x) = x \ln(x)$ 的函数图像与 $y = m$ 交于不同的两点 $A(x_1, m), B(x_2, m)$
证明: $x_1 + x_2 > \frac{2}{e}$.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如有多做,则按所做的第一题计分.

22. (10分)[选修 4-4,坐标系与参数方程]

已知曲线 C_1, C_2 的参数方程分别为 $C_1: \begin{cases} x = 4\cos^2 \theta \\ y = 4\sin^2 \theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}), C_2: \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases} (t \text{ 为参数}).$

- (1)将 C_1, C_2 的参数方程化为普通方程;
(2)以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.设 C_1, C_2 的交点为 P ,求圆心在极轴上,且经过极点和 P 的圆的极坐标方程.

23. (10分)[选修 4-5:不等式选讲]

已知关于 x 的不等式 $|x - 4| + |x - m| \geq 2m$ 的解集为 R .

- (1)求 m 的最大值;
(2)若 a, b, c 都是正实数,且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = 1$,求证: $a + 2b + 3c \geq 9$.