

华大新高考联盟 2021 届高三 11 月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】C

【命题意图】本题考查复数的概念、复数的运算,考查考生数学运算的核心素养.

【解析】依题意, $z^2=(2-i)^2=3-4i$,则 $|z^2-6|=|-3-4i|=5$,故选 C.

2.【答案】B

【命题意图】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法,考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意, $B=\{x|(x+3)(x-4)<0\}=\{x|-3<x<4\}$;而 $\complement_{\mathbb{R}}A=\{x|x\leq m\}$, $(\complement_{\mathbb{R}}A)\cap B=\{x|-3<x\leq 1\}$,故 $m=1$,故选 B.

3.【答案】A

【命题意图】本题考查回归直线方程的图像,考查考生直观想象、数学建模、逻辑推理的核心素养.

【解析】观察可知, $\hat{b}_1>\hat{b}_2>\hat{b}_3$, $\hat{a}_3>\hat{a}_2>\hat{a}_1$,故选 A.

4.【答案】B

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系,考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】②中, $A_1F\parallel D_1E$,而 $A_1F\not\subset$ 平面 BD_1E ,故 $D_1E\subset$ 平面 BD_1E ,故 $A_1F\parallel$ 平面 BD_1E ;①③中, A_1F 与平面 BD_1E 相交;故选 B.

5.【答案】A

【命题意图】本题考查数学文化、古典概型的概率,考查考生数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,阳数为 1、3、5、7、9,阴数为 2、4、6、8,故所有的情况有 $C_5^2C_4^1=40$ 种,其中满足条件的为(7, 8, 9), (7, 6, 9), (7, 4, 9), (7, 2, 9), (5, 8, 9), (5, 6, 9), (5, 4, 9), (3, 8, 9), (3, 6, 9), (1, 8, 9), (7, 8, 5), (7, 6, 5), (7, 8, 3), 共 13 种,故所求概率 $P=\frac{13}{40}$,故选 A.

6.【答案】A

【命题意图】本题考查导数的几何意义,考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意, $f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x$,故 $f'(\pi)=-2\pi$;而 $f(\pi)=-\pi^2$,故所求切线方程为 $y+\pi^2=-2\pi(x-\pi)$,即 $y=-2\pi x+\pi^2$,故选 A.

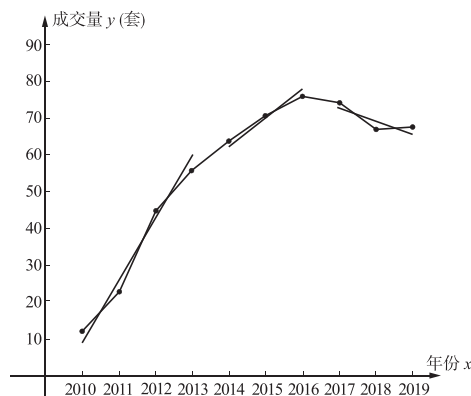
7.【答案】A

【命题意图】本题考查三角函数的图像与性质,考查考生直观想象、逻辑推理的数学素养.

【解析】依题意, $y=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,故 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$;而 $y=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$ 的最大值均为 1,故 $f(x)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$;而 $y=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$ 的周期分别为 $\frac{4\pi}{3}$, π ,故 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$, $h(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$,故选 A.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查二项式定理,考查考生的数学运算、逻辑推理的数学素养.



【解析】 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r \cdot (-1)^r \cdot x^{3-\frac{3r}{2}}$, 而 $\frac{2}{\sqrt{x^3}}-\frac{3}{x^3}=2x^{-\frac{3}{2}}-3x^{-3}$, 故要想产生常数项, 则所求常数为 $2 \times C_6^1 \times (-1) - 3 \times C_6^0 = -15$, 故选 C.

9. 【答案】B

【命题意图】本题考查三角恒等变换, 考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】显然 $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$, 故 $\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)} = \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{17\pi}{12} = \tan\frac{5\pi}{12}$, 则 $\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$, 则

$\alpha=\frac{\pi}{4}$, 故选 B.

10. 【答案】A

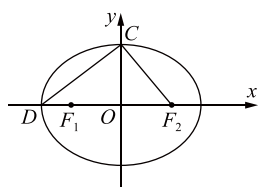
【命题意图】本题考查等差数列的基本公式、等比中项的应用, 考查考生的数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意, $S_9=9a_5=81$, 解得 $a_5=9$; 而 $a_7=13$, 故 $d=\frac{a_7-a_5}{7-5}=2$, 则 $a_1=a_5-4d=1$, 则 $S_n=n^2$, 因为 $S_3, S_{17}-S_{16}, S_k$ 成等比数列, 故 $S_3 S_k = (S_{17}-S_{16})^2 = a_{17}^2$, 则 $9k^2=33^2$, 解得 $k=11$, 故选 A.

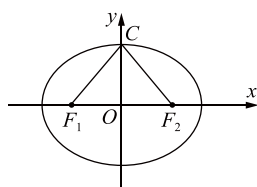
11. 【答案】A

【命题意图】本题考查椭圆的方程、椭圆的性质, 考查考生的数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

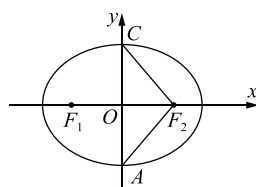
【解析】结合椭圆的对称性, 只需要考虑三种情况: 1. 如图(1), 若以 D, C, F_2 作为三角形的三个顶点, 则 $DC \perp CF_2$, 由勾股定理可得, $(a^2+b^2)+a^2=(a+c)^2$, 由 $b^2=a^2-c^2$, 可得 $c^2+ac-a^2=0$, 即 $e^2+e-1=0$, 因为 $0 < e < 1$, 解得 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 2. 如图(2), 若以 C, F_1, F_2 作为三角形的三个顶点, 则 $CF_1 \perp CF_2$, 故 $\angle OCF_2=45^\circ$, 则 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3. 如图(3), 若以 C, A, F_2 作为三角形的三个顶点, 则 $CF_2 \perp AF_2$, $\angle CF_2 O=45^\circ$, 则 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 综上所述, 故选 A.



图(1)



图(2)

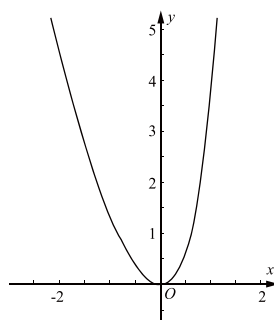


图(3)

12. 【答案】B

【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质, 考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意, $xf'(x)-2f(x)=x^3e^x$, 故 $x^2f'(x)-2xf(x)=x^4e^x$, 则 $\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=e^x$, 即 $\left[\frac{f(x)}{x^2}\right]'=e^x$, 故 $\frac{f(x)}{x^2}=e^x+c$, 令 $x=2$, 则 $\frac{f(2)}{4}=e^2+c=e^2+1$, 解得 $c=1$, 故 $f(x)=x^2(e^x+1)$, 故 $f'(x)=x(xe^x+2e^x+2)$; 令 $g(x)=xe^x+2e^x+2$, 则 $g'(x)=(x+3)e^x$, 当 $x < -3$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > -3$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $[g(x)]_{\min}=g(-3)=-3e^{-3}+2e^{-3}+2 > 0$, 故当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 作出函数 $f(x)$ 的大致图像如图所示; 观察可知, $y=f(x)$ 与 $y=2$ 有 2 个交点, 即函数 $g(x)$ 有 2 个零点, 故选 B.

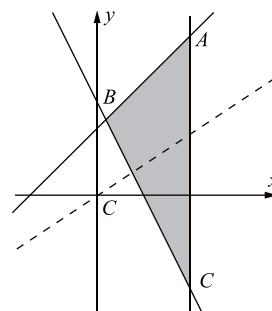


二、填空题

13. 【答案】-13.

【命题意图】本题考查线性规划,考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】作出等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示;观察可知,当直线 $z = 2x - 3y$ 过点 A 时, z 有最小值,联立 $\begin{cases} x+3=y, \\ x=4, \end{cases}$ 解得 $A(4, 7)$, 故 $z = 2x - 3y$ 的最小值为 -13.

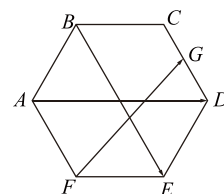


14. 【答案】 $\frac{1}{4}$.

【命题意图】本题考查平面向量的基本定理,考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$,

故 $x + y = \frac{1}{4}$.



15. 【答案】 $-\frac{8}{15}$.

【命题意图】本题考查双曲线的方程、双曲线的性质,考查考生的数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】设点 P 在第一象限. 连接 PM, PN , 则 $|OP| = \sqrt{10}$, $|OM| = |ON| = 2\sqrt{2}$, $\tan \angle MOP = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$,

所以 $|PM| = \sqrt{2}$, $\angle PMN = 90^\circ$, 故 $P(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $|MN| = 4\sqrt{2}$, 则在直角 $\triangle PMN$ 中, $\tan \angle MPN = \frac{|MN|}{|PM|}$

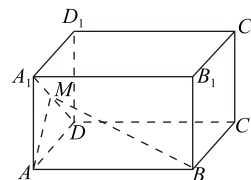
$= 4$, $\tan 2\angle MPN = \frac{8}{1-16} = -\frac{8}{15}$.

16. 【答案】 $\left[\frac{5}{4}, \frac{5\sqrt{5}}{4}\right]$.

【命题意图】本题考查空间几何体的位置关系、空间几何体的表面积与体积.

【解析】设 $BC = x$, $AA_1 = y$, 则 $\begin{cases} xy = 8, \\ x^2 + y^2 = 20, \end{cases}$ 解得 $BC = 2$, $AA_1 = 4$; 作出图形如图

所示, 连接 AM , 则 $\theta = \angle AMB$, 则 $\tan \theta = \frac{AB}{AM} = \frac{5}{AM}$;



设 $\text{Rt}\triangle A_1AD$ 斜边上的高为 h , 则 $A_1D \cdot h = AD \cdot AA_1$, 求得 $h = \frac{4}{\sqrt{5}}$, 此时 AM 最短, 结合 $AA_1 = 4$,

所以 $\frac{4}{\sqrt{5}} \leq AM \leq 4$, 故 $\frac{5}{4} \leq \tan \theta \leq \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

三、解答题

17. 【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换,考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 由 $a \sin A = 2 \sin C (a^2 + c^2 - b^2)$, 得 $a^2 c = 2c(a^2 + c^2 - b^2)$, 则 $a^2 = 2b^2 - 2c^2$; (2 分)

而 $b - c = \frac{2 \sin A}{\sin B + \sin C}$, 即 $(b - c)(b + c) = 2a$, 则 $b^2 - c^2 = 2a$; (3 分)

联立两式, 可得 $a^2 = 4a$; 因为 $a > 0$, 故 $a = 4$; (4 分)

而 $\pi r^2 = 8\pi$, 故 $r = 2\sqrt{2}$; (5 分)

则 $\sin A = \frac{a}{2r} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; (6 分)

(2) 因为 $A = C$, 故 $\sin A = \sin C$, $a = c = 4$,

代入 $ac\sin A = 2\sin C(a^2 + c^2 - b^2)$ 中, 得 $\cos B = \frac{1}{4}$, (8 分)

则 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$; (9 分)

在 $\triangle ABM$ 中, 由正弦定理, $\frac{AB}{\sin \angle AMB} = \frac{AM}{\sin \angle ABM}$,

故 $\sin \angle AMB = \frac{AB \cdot \sin \angle ABM}{AM} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{15}}{4}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (11 分)

因为 $AM > AB$, 故 $\angle AMB < \angle ABM$, 故 $\angle AMB = \frac{\pi}{3}$ (12 分)

18. 【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角, 考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】连接 CE , $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AC \perp BD$,

又 $\because \frac{AC}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \angle ABC = 60^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

$\because$ 点 E 为线段 AB 的中点, $\therefore CE \perp AB$ (2 分)

又 $\because AB \parallel CD$, $\therefore CE \perp CD$. $\because$ 在等边 $\triangle SAB$ 中, $SE \perp AB$, 由 $AB \parallel CD$ 可得, $SE \perp CD$ (3 分)

又 $\because SE \cap CE = E$, $\therefore CD \perp$ 平面 SEC , (4 分)

而 $SC \subset$ 平面 SEC , 故 $SC \perp CD$; (5 分)

(2) $\because SE \perp AB$, 二面角 $S-AB-C$ 为直二面角, 平面 $SAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, $SE \subset$ 平面 SAB ,

$\therefore SE \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore$ 直线 ES, EB, EC 两两垂直. 以点 E 为坐标原点, 分别以 ES, EB, EC 所在直线为坐标轴建立空间直角坐标系如图所示; (6 分)

不妨设 $AB = 2$, 则 $S(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 0, \sqrt{3}), D(0, -2, \sqrt{3}), B(0, 1, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{DC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{SC} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (0, -1, \sqrt{3})$; (7 分)

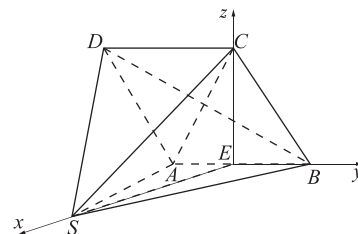
设平面 SCD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{SC} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} y = 0, \\ -\sqrt{3}x + \sqrt{3}z = 0. \end{cases}$ 令 $x = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$, ... (9 分)

记直线 BC 与平面 SCD 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{4}$,

..... (11 分)

故所求余弦值 $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ (12 分)



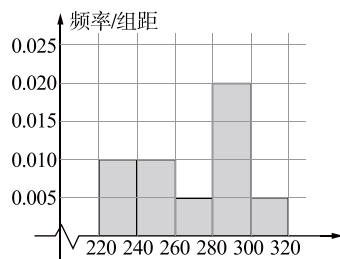
19. 【命题意图】本题考查频率分布直方图、样本的数字特征、离散型随机变量的分布列以及数学期望, 考查考生直观想象、数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 依题意, 转化频率分布表如下所示:

采购数量 x (单位: 箱)	$[220, 240)$	$[240, 260)$	$[260, 280)$	$[280, 300)$	$[300, 320]$
采购人数	100	100	50	200	50
频率	0.2	0.2	0.1	0.4	0.1
频率/组距	0.010	0.010	0.005	0.020	0.005

..... (2 分)

完善频率分布直方图如图所示:



..... (3 分)

(2) 采购量在 286 箱以下(含 286)的频率为 $0.2+0.2+0.1+0.4 \times \frac{6}{20}=0.62$; (5 分)

故采购量在 286 箱以下(含 286)的人数为 $500 \times 0.62=310$; (6 分)

所求平均值为 $230 \times 0.2+250 \times 0.2+270 \times 0.1+290 \times 0.4+310 \times 0.1=46+50+27+116+31=270$;
..... (7 分)

(3) 依题意, $X \sim B\left(4, \frac{3}{5}\right)$, 则 $P(X=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$,

$$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}, P(X=2)=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625},$$

$$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{216}{625}, P(X=4)=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625},$$

故 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

故 $E(X)=4 \times \frac{3}{5}=\frac{12}{5}$ (12 分)

20. 【命题意图】本题考查抛物线的方程、直线与抛物线综合性问题、直线与圆的位置关系, 考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 将 $A(1,2)$ 代入抛物线 $C: y^2=2px(0>0)$ 中, 得 $2p=4$, 故抛物线 $C: y^2=4x$; (1 分)

而当 $y \geq 0$ 时, 抛物线 $C: y=2\sqrt{x}$, 则 $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$, (2 分)

故所求切线斜率 $k=y'|_{x=1}=1$, 则抛物线 C 在点 A 处的切线方程为 $y-2=x-1$, 即 $x-y+1=0$;
..... (4 分)

(2) 设过点 A 的直线 AM 或 AN 的方程为 $y-2=k(x-1)$, (5 分)

即 $kx-y-k+2=0$, 则 $\frac{|2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{2}$, 解得 $k=\pm\sqrt{15}$; (7 分)

不妨设直线 AM 的方程为 $y-2=\sqrt{15}(x-1)$,

将直线 AM 与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立, 消去 x 得 $\sqrt{15}y^2-4y+8-4\sqrt{15}=0$;

设 $M(x_1, y_1)$, 则 $y_1+2=\frac{4}{\sqrt{15}}$, $\therefore y_1=\frac{4}{\sqrt{15}}-2, x_1=\frac{19}{15}-\frac{4}{\sqrt{15}}$; (9 分)

同理设 $N(x_2, y_2)$, $y_2+2=-\frac{4}{\sqrt{15}}$, $\therefore y_2=-\frac{4}{\sqrt{15}}-2, x_2=\frac{19}{15}+\frac{4}{\sqrt{15}}$; (10 分)

$\therefore$ 直线 l 的斜率 $k_l=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-y_1=-(x-x_1)$, 即 $y=-x-\frac{11}{15}$, (11 分)

∴ l 的方程 $15x+15y+11=0$, 此时圆心 $C'(1,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{26}{15\sqrt{2}}=\frac{13\sqrt{2}}{15}>\frac{1}{2}$,

∴ 直线 l 与圆 C' 相离. (12 分)

21. 【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质, 考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 依题意, $f'(x)=\frac{1}{x}-m=\frac{1-mx}{x}$, (1 分)

当 $m\leq 0$ 时, $f'(x)>0$, 故函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上单调递增; (2 分)

当 $m>0$ 时, 令 $f'(x)=0$, 则 $x=\frac{1}{m}$,

当 $\frac{1}{m}\leq 2$, 即 $m\geq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x)<0$, 故函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上单调递减; (3 分)

当 $2<\frac{1}{m}<5$, 即 $\frac{1}{5}<m<\frac{1}{2}$ 时, 当 $x\in(2,\frac{1}{m})$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x\in(\frac{1}{m},5)$ 时, $f'(x)<0$, 故函数 $f(x)$ 在 $(2,\frac{1}{m})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{m},5)$ 上单调递减; (4 分)

当 $\frac{1}{m}\geq 5$, 即 $0<m\leq \frac{1}{5}$ 时, $f'(x)>0$, 故函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上单调递增; (5 分)

综上所述, 当 $m\leq \frac{1}{5}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上单调递增; 当 $\frac{1}{5}<m<\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(2,\frac{1}{m})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{m},5)$ 上单调递减; 当 $m\geq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上单调递减; (6 分)

(2) 设 $g(x)=F'(x)=\ln x+1-2mx$, 则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2m, x>0$.

① 当 $m<0$ 时, $g'(x)>0$ 恒成立, $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增,

又 $g(1)=1-2m>0, g(e^{2m-1})=2m-1+1-2me^{2m-1}=2m(1-e^{2m-1})<0$

所以 $g(x)$ 存在唯一零点 $x_1\in(0,1)$.

当 $x\in(0,x_1)$ 时, $F'(x)=g(x)<0$, 当 $x\in(x_1,1)$ 时, $F'(x)=g(x)>0$.

所以 $F(x)$ 存在唯一的极小值点 $x_0=x_1$.

② 当 $m=0$ 时, $g(x)=\ln x+1, g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增, $g(\frac{1}{e})=0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一零点 $\frac{1}{e}$.

当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时, $F'(x)=g(x)<0$, 当 $x\in(\frac{1}{e},1)$ 时, $F'(x)=g(x)>0$.

所以 $F(x)$ 存在唯一的极小值点 $x_0=\frac{1}{e}$ (7 分)

③ 当 $m>0$ 时, 令 $g'(x)>0$, 得 $x\in(0,\frac{1}{2m})$; 令 $g'(x)<0$, 得 $x\in(\frac{1}{2m},+\infty)$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2m})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{2m},+\infty)$ 单调递减,

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(\frac{1}{2m})=-\ln(2m)$, (8 分)

(i) 当 $0<m<\frac{1}{2}$ 时, $g(\frac{1}{e})<0, g(1)=1-2m>0, g(\frac{1}{2m})>0$,

$g(\frac{1}{m^2})=-2\ln m+1-\frac{2}{m}<-2(1-\frac{1}{m})+1-\frac{2}{m}=-1<0$ (或用 $g(e^{\frac{1}{m}-1})=\frac{1}{m}-2me^{\frac{1}{m}-1}<0$)

由函数零点存在定理知: $g(x)$ 在区间 $(0,1), (1,+\infty)$ 分别有一个零点 x_2, x_3

当 $x \in (0, x_2)$ 时, $F'(x) = g(x) < 0$; 当 $x \in (x_2, x_3)$ 时, $F'(x) = g(x) > 0$;

所以 $F(x)$ 存在唯一的极小值点 $x_0 = x_2$, 极大值点 x_3 .

(ii) 当 $m \geq \frac{1}{2}$ 时, $g\left(\frac{1}{2m}\right) \leq 0, F'(x) = g(x) \leq 0$, 故 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 无极值点. (9 分)

由以上可知, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $F'(x) < 0$;

所以 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减, $(x_0, 1)$ 单调递增, 所以 $M = F(x_0) < F(1) = -m$ (10 分)

由 $F'(x_0) = \ln x_0 + 1 - 2mx_0 = 0$, 得 $\ln x_0 = 2mx_0 - 1$.

所以 $M = F(x_0) = x_0 \ln x_0 - mx_0^2 = x_0(2mx_0 - 1) - mx_0^2 = mx_0^2 - x_0$,

$M - (m - 1) = mx_0^2 - m - x_0 + 1 = (x_0 - 1)[m(x_0 + 1) - 1]$,

因为 $x_0 \in (0, 1), m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $x_0 - 1 < 0, m(x_0 + 1) - 1 < \frac{1}{2} \times 2 - 1 = 0$

所以 $M - (m - 1) > 0$, 即 $M > m - 1$; 所以 $m - 1 < M < -m$ (12 分)

22. 【命题意图】本题考查极坐标方程、直角坐标方程的转化、直线参数方程的应用, 考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为 $\rho \sqrt{1 - |\cos \theta|} \cdot \sin \theta = 1$, 故 $\rho^2 (1 - |\cos \theta| \cdot \sin \theta) = 1$,

故 $\rho^2 - |\rho \cos \theta| \cdot \rho \sin \theta = 1$, 即 $x^2 + y^2 - |x|y = 1$; (4 分)

(2) 设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -\frac{3}{5}t \\ y = 2 + \frac{4}{5}t \end{cases}$ (t 为参数), (6 分)

若直线 l 与曲线 C 交于 M, N , 则只能交于 y 轴右侧部分 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 将直线的参数方程代入,

可得 $\frac{37}{25}t^2 + \frac{22}{5}t + 3 = 0$, (8 分)

设 M, N 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 故 $|PM| \cdot |PN| = |t_1 t_2| = \frac{75}{37}, |PM| + |PN| = |t_1| + |t_2| = \frac{110}{37}$,

故 $\frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|} = \frac{|PM| + |PN|}{|PM| \cdot |PN|} = \frac{22}{15}$ (10 分)

23. 【命题意图】本题考查绝对值不等式的解法、绝对值三角不等式的性质, 考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 依题意, $|2x - 2| + |x - 6| > 12$;

当 $x < 1$ 时, $2 - 2x + 6 - x > 12$, 则 $x < -\frac{4}{3}$, 故 $x < -\frac{4}{3}$; (2 分)

当 $1 \leq x \leq 6$ 时, $2x - 2 + 6 - x > 12$, 则 $x > 8$, 无解; (3 分)

当 $x > 6$ 时, $2x - 2 + x - 6 > 12$, 则 $x > \frac{20}{3}$, 故 $x > \frac{20}{3}$; (4 分)

故不等式 $f(x) > 12$ 的解集为 $\left\{x \mid x < -\frac{4}{3} \text{ 或 } x > \frac{20}{3}\right\}$; (5 分)

(2) 依题意, $f(x) = 2a$,

而 $f(x) = |2x - 2| + |x - 6| = |x - 1| + |x - 1| + |x - 6| \geq |x - 1| + |x - 6|$,

而 $|x - 1| + |x - 6| \geq 5$, (7 分)

当且仅当 $1 \leq x \leq 6$ 时等号成立, (8 分)

因为 $A \neq \emptyset$, 故 $2a \geq 5$, 则 $a \geq \frac{5}{2}$, 故实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ (10 分)