

华大新高考联盟 2021 届高三 3 月教学质量测评

数 学

命题:华中师范大学考试研究院

本试题卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{y | y = \sqrt{2x-1}\}$, $B = \{x | (3x-4)(x+1) > 0\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$

- A. $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$ C. $\left[0, \frac{4}{3}\right)$ D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$

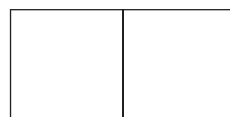
2. 若复数 z 满足 $|z-2-3i|=5$, 则复数 z 的共轭复数不可能为

- A. $5-7i$ B. $-2-6i$ C. $5+2i$ D. $2-8i$

3. 设 $a = \log_{\frac{1}{3}} 15$, $b = \log_{\frac{1}{6}} 30$, $c = \log_{\frac{1}{7}} 35$, 则

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

4. 小学数学在“认识图形”这一章节中,一般从生活实物入手,抽象出数学图形,在学生正确认识图形特征的基础上,通过习题帮助学生辨认所学图形;例如在小学数学课本中有这样一个 2×1 的方格表(如图所示),它由 2 个单位小方格组成,其中每个小



方格均为正方形;若在这 2×1 方格表的 6 个顶点中任取 2 个顶点,则这 2 个顶点构成的线段长度不超过 $\sqrt{2}$ 的概率为

- A. $\frac{13}{15}$ B. $\frac{11}{15}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

5. 圆 $C_1: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$ 与圆 $C_2: (x-5)^2 + y^2 = 16$ 的公切线条数为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 若 $\lambda \sin 170^\circ + \tan 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则实数 λ 的值为

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过双曲线 C 上的一点 M 作两条渐近线的垂线,垂足分别为 A, B , 若 $|F_1 F_2|^2 = 16 |MA| \cdot |MB|$, 则双曲线 C 的离心率为

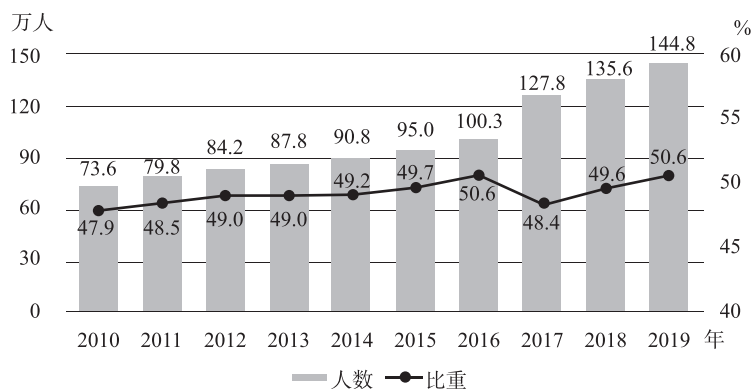
- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

8. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=2BC=4$, $AC=2\sqrt{3}$,点 M 在线段 AC 上除 A,C 的位置运动,现沿 BM 进行翻折,使得线段 AB 上存在一点 N ,满足 $CN\perp$ 平面 ABM ;若 $NB>\lambda$ 恒成立,则实数 λ 的最大值为

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9. 根据国家统计局数据显示,我国2010~2019年研究生在校女生人数及所占比重如图所示,则下列说法正确的是



2010~2019年研究生在校女生人数及所占比重

- A. 2010~2019年,我国研究生在校女生人数逐渐增加
 B. 可以预测2020年,我国研究生在校女生人数将不低于144万
 C. 2017年我国研究生在校女生人数少于男生人数
 D. 2019年我国研究生在校总人数不超过285万
10. 已知边长为4的正方形 $ABCD$ 的对角线的交点为 O ,以 O 为圆心,6为半径作圆;若点 E 在圆 O 上运动,则
 A. $\vec{EA} \cdot \vec{EB} + \vec{EB} \cdot \vec{EC} + \vec{EC} \cdot \vec{ED} + \vec{ED} \cdot \vec{EA} = 72$ B. $\vec{EA} \cdot \vec{EC} + \vec{EB} \cdot \vec{ED} = 56$
 C. $\vec{EA} \cdot \vec{EB} + \vec{EB} \cdot \vec{EC} + \vec{EC} \cdot \vec{ED} + \vec{ED} \cdot \vec{EA} = 144$ D. $\vec{EA} \cdot \vec{EC} + \vec{EB} \cdot \vec{ED} = 28$
11. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$)在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有6个零点,则实数 ω 的值可能为
 A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{17}{6}$ C. 3 D. $\frac{10}{3}$
12. 已知函数 $f(x) = x \ln x + ax$,则下列说法正确的是
 A. 若 $a=1$,则曲线 $y=f(x)$ 在 $(e, f(e))$ 处的切线与 $3x-y=0$ 相互平行
 B. 函数 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增的必要不充分条件是 $a \geq -1 - \ln 4$
 C. 记函数 $f(x)$ 的最小值为 $\varphi(a)$,则 $\varphi(a) \leq a$
 D. 若 $a=2$, $\exists k \in \mathbb{Z}$,使得 $\frac{f(x)+2k}{x} > k+1$ 在 $x \in (2, +\infty)$ 恒成立,则 k 的最大值为3

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \frac{8}{5}e^x + \frac{12}{5}e^{-x}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为_____.

14. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 27, 点 E, F 分别是线段 BC, CC_1 的中点, 点 G 在四边形 BCC_1B_1 内运动(含边界), 若直线 A_1G 与平面 AEF 无交点, 则正方体的外接球表面积为_____, 线段 CG 的取值范围为_____.

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_{10} = 32, S_5 = 55$, 则 $S_n =$ _____.

16. 已知点 M 在抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上运动, 圆 C' 过点 $(5, 0), (2, \sqrt{3}), (3, -2)$, 过点 M 引直线 l_1, l_2 与圆 C' 相切, 切点分别为 P, Q , 则 $|PQ|$ 的取值范围为_____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在① $b^2 + c^2 - a^2 = bc$; ② $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4$; ③ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2A\right) + 2\cos^2 \frac{A}{2} = 1$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

问题: 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\sin C = 2\sin B, b = 2$, _____?

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分。

18. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_3 = \frac{1}{4}, S_3 = \frac{7}{4}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

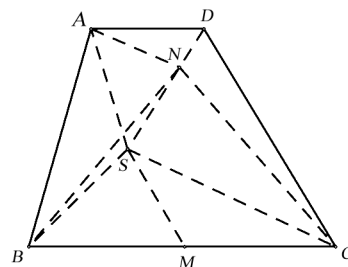
(2) 若 $a_n > 0$, 求数列 $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

已知四棱锥 $S-ABCD$ 如图所示, 其中 $\triangle SAB, \triangle SBC$ 均为等边三角形, 二面角 $A-BS-C$ 为直二面角, 点 M 为线段 BC 的中点, 点 N 是线段 SD 上靠近 D 的三等分点, $BC \parallel$ 平面 SAD .

(1) 求证: $AD \perp SM$;

(2) 若 $AD = \frac{1}{2}BC$, 求直线 AN 与平面 BNC 所成角的正弦值.



20. (12 分)

在某媒体上有这样一句话: 买车一时爽, 一直养车一直爽, 讲的是盲目买车的人最终会成为一个不折不扣的车奴; 其实, 买车之后的花费主要由加油费、停车费、保险费、保养费、维修费等几部分构成; 为了了解新车车主 5 年以来的花费, 打破年轻人买车的恐惧感, 研究人员在 2016 年对 A 地区购买新车的 400 名车主进行跟踪调查, 并将他们 5 年以来的新车花费统计如下表所示:

5 年花费(万元)	$[3, 5)$	$[5, 7)$	$[7, 9)$	$[9, 11)$	$[11, 13)$	$[13, 15]$
人数	60	100	120	40	60	20

(1)求这 400 名车主 5 年新车花费的平均数以及方差(同一区间的花费用区间的中点值替代);

(2)以频率估计概率,假设 A 地区 2016 年共有 100000 名新车车主,若所有车主 5 年内新车花费 ξ 可视为服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 分别为(1)中的平均数 $\bar{x}$ 以及方差 s^2 , 试估计 2016 年新车车主 5 年以来新车花费在 $[5.2, 13.6)$ 的人数;

(3)以频率估计概率,若从 2016 年 A 地区所有的新车车主中随机抽取 4 人,记花费在 $[9, 15]$ 的人数为 X , 求 X 的分布列以及数学期望.

参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.4$;

若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 的右焦点为 F , 过点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点.

(1)若直线 l 的倾斜角为 45° , 求 $|AB|$ 的值;

(2)记椭圆 C 的右顶点为 D , 若点 $M(9, y_M), N(9, y_N)$ 分别在直线 AD, BD 上, 求证: $FM \perp FN$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x (me^x - 1) + x$, 其中 $m > 0$.

(1)若函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 求实数 m 的取值范围;

(2)若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 仅有 1 个实数根, 求实数 a 的取值范围.