

北京高考创新大题专项突破

兰琦

2016 年 9 月 23 日

目录

第一章 基础篇	5
1.1 算两次	5
1.1.1 阿贝尔求和	5
1.1.2 按行按列求和	6
1.1.3 课后习题	9
1.2 找规律	13
1.2.1 公共的性质	13
1.2.2 变化中的不变	13
1.2.3 课后习题	14
1.3 极端情形	16
1.3.1 绝对值之和的最值	16
1.3.2 上界与下界	18
1.3.3 最值原理	19
1.3.4 课后习题	20
第二章 核心篇	23
2.1 不变量与存在问题	23
2.1.1 不变量与存在性的否定	23
2.1.2 半不变量与存在性的肯定	24
2.1.3 课后习题	26
2.2 调整法与最值问题	30
2.2.1 调整方案问题	30
2.2.2 调整次数问题	32
2.2.3 调整方向问题	34
2.2.4 课后习题	37
第三章 进阶篇	39
3.1 递推与递归	39
3.1.1 由简单递推到复杂	39
3.1.2 将复杂递推到简单	40
3.1.3 课后习题	42
3.2 集合与对应	45
3.2.1 一一映射	45
3.2.2 单射与满射	46

3.2.3	课后习题	48
3.3	构造与论证	49
3.3.1	利用提示构造	49
3.3.2	利用图表构造	52
3.3.3	利用公式构造	54
3.3.4	常见命题背景	54
3.3.5	论证举例	56
3.3.6	课后习题	58

第一章 基础篇

1.1 算两次

1.1.1 阿贝尔求和

例题 1.1.1

证明: (排序不等式) 若两组实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n,$$

则

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \dots + a_n b_{i_n} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n,$$

其中 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列.

解 注意利用 Abel 恒等式.

例题 1.1.2

(2015 年 3 月北京市部分学校高三联考) 设 n 为给定的不小于 5 的正整数, 考察 n 个不同的正整数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 构成的集合 $P = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 若集合 P 的任何两个不同的非空子集所含元素的总和均不相等, 则称集合 P 为“差异集合”.

- (1) 分别判断集合 $A = \{1, 3, 8, 13, 23\}$, 集合 $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 是否是“差异集合”(只需写出结论);
- (2) 设集合 $P = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 是“差异集合”, 记 $b_i = a_i - 2^{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 求证: 数列 $\{b_i\}$ 的前 k 项和 $D_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$);
- (3) 设集合 $P = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 是“差异集合”, 求 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$ 的最大值.

解 (1) 根据“差异集合”的定义, 集合 A 不是“差异集合”(因为 $1 + 23 = 3 + 8 + 13$), 而集合 B 是“差异集合”(因为 $B = \{00001_{(2)}, 00010_{(2)}, 00100_{(2)}, 01000_{(2)}, 10000_{(2)}\}$).

(2) 由集合 P 是“差异集合”知: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的 $2^k - 1$ 个非空子集元素和为互不相等的 $2^k - 1$ 个正

整数, 于是 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 2^k - 1$, 所以

$$D_k = (a_1 - 2^0) + (a_2 - 2^1) + (a_k - 2^{k-1}) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - (2^k - 1) \geq 0.$$

(3) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ 的最大值为 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$, 证明如下:

不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. 考虑两者之差

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} &= \frac{a_1 - 1}{a_1} + \frac{a_2 - 2}{2a_2} + \frac{a_3 - 2^2}{2^2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{a_n - 2^{n-1}}{2^{n-1} \cdot a_n} \\ &= \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{2a_2} + \frac{b_3}{2^2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{b_n}{2^{n-1} \cdot a_n} \\ &= \frac{D_1}{a_1} + \frac{D_2 - D_1}{2a_2} + \frac{D_3 - D_2}{2^2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{D_n - D_{n-1}}{2^{n-1} \cdot a_n} \\ &= D_1 \cdot \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{2a_2} \right) + D_2 \cdot \left(\frac{1}{2a_2} - \frac{1}{2^2 a_3} \right) + \cdots + D_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-2} a_{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1} a_n} \right) + \frac{D_n}{2^{n-1} a_n} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

等号当 $a_i = 2^{i-1}, i = 1, 2, 3, \cdots, n$ 时取得. 因此 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ 的最大值为 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

注 思路来自于 Abel 求和公式

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^n S(a_i) \cdot \Delta(b_i),$$

其中

$$S(a_i) = a_1 + a_2 + \cdots + a_i, \Delta(b_i) = b_i - b_{i+1} (i = 1, 2, \cdots, n),$$

补充定义 $b_{n+1} = 0$, 这是级数不等式放缩的重要恒等式.

1.1.2 按行按列求和

例题 1.1.3

(2015 年西城二模) 无穷数列 $P: a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 满足 $a_i \in \mathbb{N}^*$, 且 $a_i \leq a_{i+1} (i \in \mathbb{N}^*)$. 对于数列 P , 记 $T_k(P) = \min \{n | a_n \geq k\} (k \in \mathbb{N}^*)$, 其中 $\min \{n | a_n \geq k\}$ 表示集合 $\{n | a_n \geq k\}$ 中最小的数.

(1) 若数列 $P: 1, 3, 4, 7, \cdots$, 写出 $T_1(P), T_2(P), T_3(P), T_4(P), T_5(P)$ 的值;

(2) 若 $T_k(P) = 2k - 1$, 求数列 P 前 n 项的和;

(3) 已知 $a_{20} = 46$, 求 $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} + T_1(P) + T_2(P) + \cdots + T_{46}(P)$ 的值.

解 (1) $T_1(P) = 1, T_2(P) = 2, T_3(P) = 2, T_4(P) = 3, T_5(P) = 4$.

$$(2) S_n = \begin{cases} \frac{(n+1)^2}{4}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{n^2 + 2n}{4}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

(3) 一般的, $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + T_1(P) + T_2(P) + \cdots + T_{a_n}(P) = (n+1)a_n$.

所以当 $a_{20} = 46$ 时, $s = (20+1) \times 46 = 966$.

事实上, 设数列 P 中有 m_i 个 i , 其中 $i = 1, 2, \dots, 46$, 则

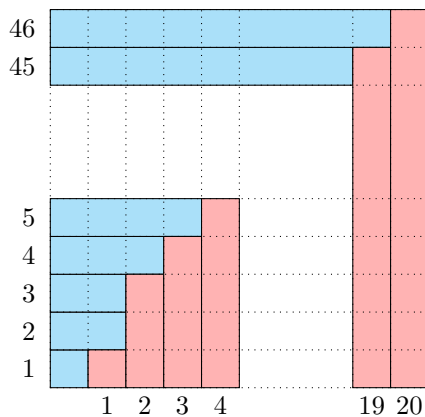
$$\sum_{i=1}^{46} m_i = 20, \sum_{i=1}^{46} (im_i) = a_1 + a_2 + \dots + a_{20}.$$

于是

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \dots + a_{20} + T_1(P) + T_2(P) + \dots + T_{46}(P) \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{20}) + 1 + (m_1 + 1) + \dots + (m_1 + m_2 + \dots + m_{45} + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{46} im_i + 46 + 45m_1 + 44m_2 + \dots + 2m_{44} + m_{45} \\ &= \sum_{i=1}^{46} [(i + 46 - i)m_i] + 46 \\ &= 46 \sum_{i=1}^{46} m_i + 46 \\ &= 46 \times 20 + 46 \\ &= 966. \end{aligned}$$

几何解释如下:

以 $P: 1, 3, 4, 5, \dots, 45, 46$ 为例, 将 a_i ($i = 1, 2, \dots, 20$) 用红色格子的数目表示, 如图. 那么 $T_j(P)$ ($j = 1, 2, \dots, 46$) 的几何意义是高度小于 j 的红色柱子的数目 (将表示数列中的项的若干红色格子看成红色柱子), 也就是从下往上第 j 行的蓝色格子数.



这样就可以得到 $a_1 + a_2 + \dots + a_{19} + a_{20}$ 的几何意义为图中所有的红色格子按列从左向右求和, 而 $T_1(P) + T_2(P) + \dots + T_{45}(P) + T_{46}(P)$ 的几何意义为图中所有的蓝色格子按行从下向上求和, 因此所求的和式值为 $(1 + 20) \times 46 = 966$.

例题 1.1.4

已知 n 为正整数, $S_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_{2^n}) \mid a_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq 2^n\}$, 对 S_n 中任意两个元素 $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2^n})$ 和 $b = (b_1, b_2, \dots, b_{2^n})$, 令 $d(a, b) = \sum_{i=1}^{2^n} |a_i - b_i|$. 若 $A \subseteq S_n$, 满足对 A 中任何两个不同的元素 a 和 b , 都有 $d(a, b) \geq 2^{n-1}$, 则称 A 为 S_n 的好子集.

(1) 试写出 S_2 的一个好子集 M , 使 M 中的任何两个不同的元素 a 和 b , 都有 $d(a, b) = 2$, 且 M 的元素个数为 4;

(2) 试写出 S_2 的一个好子集 N , 使 N 中任何两个不同的元素 a 和 b , 都有 $d(a, b) \geq 2$, 且 N 的元素个数为 8;

(3) 试求 S_n 的好子集 A 的元素个数 $|A|$ 的最大值.

解 (1) 简记为 $\{0000, 0011, 0101, 0110\}$;

(2) 简记为 $\{0000, 0011, 0101, 0110, 1111, 1100, 1010, 1001\}$;

(3) 约定: 对于 $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2^n})$ 和 $b = (b_1, b_2, \dots, b_{2^n})$, 记

$$\bar{a} = (1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_{2^n}), ab = (a_1, a_2, \dots, a_{2^n}, b_1, b_2, \dots, b_{2^n})$$

对于集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, $d(A) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^n d(a_i, a_j)$.

1° 首先对于 S_n , 我们构造满足 $|A_n| = 2^{n+1}$ 的好子集 A_n , 这里用到归纳构造.

对于 S_1 , 很容易写出

$$A_1 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

符合条件.

现在证明, 如果对于 S_K , 若已经有好子集 A_k , 且 $|A_k| = 2^{k+1}$, 那么可以构造好子集 A_{k+1} , 且 $|A_{k+1}| = 2^{k+2}$;

对集合 A_k 中的每个元素 a 改写成 aa (记为重型) 和 $a\bar{a}$ (记为补型), 就得到集合 A_{k+1} .

例如:

$$A_2 = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), \dots, (1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}$$

接下来证明 A_{k+1} 是好子集.

在 A_{k+1} 中的任取两个元素, 若它们为 A_k 中同一元素生成的, 那么显然 $d(aa, a\bar{a}) = 2^k$;

若它们不是 A_k 中同一元素生成的:

如果它们都是重型, 设为 aa , bb , 则

$$d(aa, bb) = 2d(a, b) \geq 2^k,$$

如果它们都为补型, 设为 $a\bar{a}$, $b\bar{b}$, 则

$$d(a\bar{a}, b\bar{b}) = d(a, b) + d(\bar{a}, \bar{b}) = 2d(a, b) \geq 2^k,$$

如果它们分别为重型和补型, 设为 $aa, b\bar{b}$, 则

$$d(aa, b\bar{b}) = d(a, b) + d(a, \bar{b}) = 2^k.$$

综上 A_{k+1} 是好子集.

2° 接下来证明对于 S_n , 不存在好子集 A_n 且 $|A_n| > 2^{n+1}$, 这里用反证法.

假设对于 S_n , 存在好子集 A_n 且 $|A_n| > 2^{n+1}$, 那么

$$|A_n| \geq 2^{n+1} + 1.$$

于是根据抽屉原理, A_n 中至少存在 $2^n + 1$ 个元素, 它们的第 1 位都是相同的.

设 $2^n + 1$ 个第 1 位相同的元素组成集合 B , 由于 $B \subseteq A_n$, 所以 B 是好子集.

现在用两种方式计算 $d(B)$,

方式一: 按 $d(B)$ 的定义, 将元素之间的差异进行求和, 有

$$d(B) \geq C_{2^n+1}^2 \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n \cdot (2^n + 1)}{2} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^{2n} \cdot (2^n + 1)}{4}.$$

方式二: 计算所有元素在某一位的差异进行求和.

假设 B 中的所有元素在第 k 位 ($k \geq 2$) 上有 x 个 0, y 个 1, 那么所有元素在第 k 位上的差异为

$$x \cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{2^n+1}{2}\right)^2.$$

于是

$$d(B) \leq (2^n - 1) \cdot \left(\frac{2^n+1}{2}\right)^2 = \frac{(2^n+1) \cdot (2^{2n}-1)}{4}.$$

这样就推出了矛盾.

因此对于 S_n , 不存在好子集 A_n 且 $|A_n| > 2^{n+1}$.

综合 1°2°, S_n 的好子集 A 的元素个数 $|A|$ 的最大值为 2^{n+1} .

1.1.3 课后习题

习题 1.1.1 (2010 年北京) 已知集合 $S_n = \{X | X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\} (n \geq 2)$. 对于 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$, 定义 A 与 B 的差为

$$A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|);$$

A 与 B 之间的距离为 $d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$.

(1) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, 有 $A - B \in S_n$, 且 $d(A - C, B - C) = d(A, B)$;

(2) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, $d(A, B), d(A, C), d(B, C)$ 三个数中至少有一个是偶数;

(3) 设 $P \subseteq S_n$, P 中有 $m (m \geq 2)$ 个元素, 记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\bar{d}(P)$. 证明: $\bar{d}(P) \leq$

$$\frac{mn}{2(m-1)}.$$

解 (3) $\bar{d}(P) = \frac{1}{C_m^2} \sum_{A, B \in P} d(A, B)$, 其中 $\sum_{A, B \in P} d(A, B)$ 表示 P 中所有两个元素间距离的总和. 设 P 中所有元素的第 i 个位置的数字中共有 t_i 个 1, $m - t_i$ 个 0, 则

$$\sum_{A, B \in P} d(A, B) = \sum_{i=1}^n t_i(m - t_i).$$

由于 $t_i(m - t_i) \leq \frac{m^2}{4} (i = 1, 2, \dots, n)$, 所以

$$\sum_{A, B \in P} d(A, B) \leq \frac{nm^2}{4}.$$

从而

$$\bar{d}(P) = \frac{1}{C_m^2} \sum_{A, B \in P} d(A, B) \leq \frac{nm^2}{4C_m^2} = \frac{mn}{2(m-1)}.$$

习题 1.1.2 (2014 年西城二模) 在无穷数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_n \in \mathbb{N}^*$, $a_n < a_{n+1}$.

设 $m \in \mathbb{N}^*$, 记使得 $a_n \leq m$ 成立的 n 的最大值为 b_m .

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 为 $1, 3, 5, 7, \dots$, 写出 b_1, b_2, b_3 的值;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 求出所有可能的数列 $\{a_n\}$;

(3) 设 $a_p = q$, $a_1 + a_2 + \dots + a_p = A$, 求 $b_1 + b_2 + \dots + b_q$ 的值 (用 p, q, A 表示).

解 (1) $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2$.

(2) $a_n = n$.

(3) $b_1 + b_2 + \dots + b_q = p(q+1) - A$.

习题 1.1.3 (2011 年东城一模理) 对于 $n \in \mathcal{N}^* (n \geq 2)$, 定义一个如下数阵:

$$A_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中对任意的 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, 当 i 能整除 j 时, $a_{ij} = 1$; 当 i 不能整除 j 时, $a_{ij} = 0$. 设

$$t(j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj}.$$

(1) 当 $n = 6$ 时, 试写出数阵 A_{66} 并计算 $\sum_{j=1}^6 t(j)$;

(2) 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求证: $\sum_{j=1}^n t(j) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{n}{i} \right]$;

(3) 若 $f(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t(j)$, $g(n) = \int_1^n \frac{1}{x} dx$, 求证: $g(n) - 1 < f(n) < g(n) + 1$.

解 (1) 依题意可得,

$$A_{66} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\sum_{j=1}^6 t(j) = 1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 = 14.$$

(2) 由题意可知, $t(j)$ 是数阵 A_{nn} 的第 j 列的和, 因此 $\sum_{j=1}^n t(j)$ 是数阵 A_{nn} 所有数的和. 而数阵 A_{nn} 所有数的和也可以考虑按行相加. 对任意的 $1 \leq i \leq n$, 不超过 n 的倍数有 $1i, 2i, \dots, \left[\frac{n}{i}\right]i$. 因此数阵 A_{nn} 的第 i 行中有 $\left[\frac{n}{i}\right]$ 个 1, 其余是 0, 即第 i 行的和为 $\left[\frac{n}{i}\right]$. 所以

$$\sum_{j=1}^n t(j) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{n}{i}\right].$$

(3) 原不等式 $\Leftrightarrow f(n) - 1 < g(n) < f(n) + 1$.

由 $[x]$ 的定义可知,

$$\frac{n}{i} - 1 < \left[\frac{n}{i}\right] \leq \frac{n}{i},$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \frac{n}{i} - n < \sum_{i=1}^n \left[\frac{n}{i}\right] \leq \sum_{i=1}^n \frac{n}{i}.$$

从而

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - 1 < f(n) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

考查定积分 $\int_1^n \frac{1}{x} dx$, 将区间 $[1, n]$ 按照整点等分, 则

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} < \int_1^n \frac{1}{x} dx < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

于是

$$f(n) - 1 < \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - 1 < g(n) < \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < f(n) + 1.$$

综上, 原命题得证.

习题 1.1.4 (2011 年海淀一模) 已知每项均是正整数的数列 $A: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 其中等于 i 的项有 k_i 个 ($i = 1, 2, 3, \dots$), 设 $b_j = k_1 + k_2 + \dots + k_j$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), $g(m) = b_1 + b_2 + \dots + b_m - nm$ ($m = 1, 2, 3, \dots$).

(1) 设数列 $A: 1, 2, 1, 4$, 求 $g(1), g(2), g(3), g(4), g(5)$;

(2) 若数列 A 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n = 100$, 求函数 $g(m)$ 的最小值.

解 (1) $A: 1, 2, 1, 4$

i	k_i	b_i	$b_1 + b_2 + \cdots + b_i$	$g(i)$
1	2	2	2	-2
2	1	3	5	-3
3	0	3	8	-4
4	1	4	12	-4
5	0	4	16	-4
6	0	4	20	-4
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

(2) 记 $c_m = g(m)$, 则

$$\Delta c_m = c_{m+1} - c_m = g(m+1) - g(m) = b_{m+1} - n.$$

根据数列 $\{b_m\}$ 的定义, 记 $\max(a_1, a_2, \cdots, a_n) = N$, 则

当 $m < N$ 时, $b_m \leq n$; 当 $m \geq N$ 时, $b_m = n$.

于是当 $m+1 < N$ 时, $\Delta c_m \leq 0$; 当 $m+1 \geq N$ 时, $\Delta c_m = 0$.

这就意味着从第 N 项起 c_m 是常数, 且该常数就是数列 $\{c_m\}$ 的最小值.

$$\begin{aligned}
 [g(m)]_{\min} &= g(N) = b_1 + b_2 + \cdots + b_N - N \cdot n \\
 &= -[(n - b_1) + (n - b_2) + \cdots + (n - b_N)] \\
 &= -[(k_2 + k_3 + \cdots + k_N) + (k_3 + k_4 + \cdots + k_N) + \cdots + k_N + 0] \\
 &= -[k_2 + 2k_3 + \cdots + (N-1)k_N] \\
 &= -(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + Nk_N) + (k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_N) \\
 &= -(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + n \text{ (两种不同的求和方式)} \\
 &= -100.
 \end{aligned}$$

1.2 找规律

1.2.1 公共的性质

例题 1.2.1

(2016 年朝阳一模) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 3n - 1, n \in \mathbb{N}^*$. 设数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的等比子列, 且 $b_n = a_{k_n}$.

(1) 若 $b_1 = a_1 = 2$, 且等比数列 $\{b_n\}$ 的公比最小,

① 写出数列 $\{b_n\}$ 的前 4 项;

② 求数列 $\{k_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 以 $b_1 = a_2 = 5$ 为首项的无穷等比数列 $\{b_n\}$ 有无数多个.

解 (1) ① 2, 8, 32, 128. ② $k_n = \frac{2 \cdot 4^{n-1} + 1}{3}$.

(2) 令 $q = 3m + 1, m \in \mathbb{N}^*$ 均可, 注意到 $\{a_n\}$ 中所有的元素模 3 余 2.

1.2.2 变化中的不变

例题 1.2.2

(2016 年西城二模) 已知任意的正整数 n 都可唯一表示为 $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_k \cdot 2^k$, 其中 $a_k = 1, a_0, a_1, \cdots, a_{k-1} \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N}$.

(1) 写出数列 $\{b_n\}$ 的前 8 项;

(2) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 中连续为 1 的项不超过 2 项;

(3) 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求满足 $S_n = 1026$ 的所有 n 的值. (结论不要求证明)

解 (1) 根据题意, 有

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n_{(2)}$	1	10	11	100	101	110	111	1000
b_n	1	1	0	1	0	0	1	1

(2) 不妨假设 $b_n = b_{n+1} = b_{n+2} = 1$, 则若 $n_{(2)}$ 以 0 结尾, 则 $b_n \neq b_{n+1}$; 否则 $(n+1)_{(2)}$ 以 0 结尾, 则 $b_{n+1} \neq b_{n+2}$, 均矛盾. 因此原命题得证.

(3) 既可以从第 (1) 小题出发找规律, 也可以从第 (2) 小题出发找规律.

方法一 观察 b_n , 可得当 $n = 2^k$ 时, $b_n = 1$, 且 $b_1, b_2, \cdots, b_{2^k-1}$ 与 $b_{2^k+1}, b_{2^k+2}, \cdots, b_{2^{k+1}-1}$ 互反, 因此有 $S_{2^n} = 2^{n-1} + 1$, 因此 $S_{2048} = 1025$, 进而写出接下来的 b_n 为 0, 0, 1, 0, 1, $\cdots$ 即得所有符合题意的 n 为 2051, 2052.

方法二 由 (2) 的结论可得, $b_{2k} + b_{2k+1} = 1$, 从而 $S_{2051} = 1026$, 接下来计算 $b_{2051} = 1, b_{2052} = 0$ 即得所有符合题意的 n 为 2051, 2052.

1.2.3 课后习题

习题 1.2.1 (2011 年北京) 若数列 $A_n : a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$ 满足 $|a_{n+1} - a_k| = 1 (k = 1, 2, \dots, n-1)$, 则称 A_n 为 E 数列. 记 $S(A_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

(1) 写出一个满足 $a_1 = a_5 = 0$, 且 $S(A_5) > 0$ 的 E 数列 A_5 ;

(2) 若 $a_1 = 12$, $n = 2000$, 证明: E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n = 2011$;

(3) 对任意给定的整数 $n (n \geq 2)$, 是否存在首项为 0 的 E 数列 A_n , 使得 $S(A_n) = 0$? 如果存在, 写出一个满足条件的 E 数列 A_n ; 如果不存在, 说明理由.

解 (1) $0, 1, 2, 1, 0$;

(2) 因为 $|a_{k+1} - a_k| = 1$, 所以 $a_{k+1} - a_k \leq 1$, 于是 $a_{2000} - a_{1999} \leq 1$, $a_{1999} - a_{1998} \leq 1, \dots, a_2 - a_1 \leq 1$. 从而 $a_{2000} - a_1 \leq 1999$, 当且仅当

$$a_{2000} - a_{1999} = a_{1999} - a_{1998} = \dots = a_2 - a_1 = 1$$

时取得等号, 即 $a_{2000} \leq 2011$, 当且仅当 E 数列 A_n 是递增数列时取得等号. 因此原命题成立.

(3) 显然当 i 是奇数时, a_i 为偶数; 当 i 是偶数时, a_j 是奇数. 其中 $1 \leq i \leq n, i \in \mathcal{N}^*$. 因此若 $S(A_n) = 0$, 则 n 为 4 的倍数加 1, 否则 $S(A_n)$ 为奇数. 当 n 为 4 的倍数时, 满足条件的一个 A_n 是

$$\underbrace{0, 1, 0, -1}, \underbrace{0, 1, 0, -1}, \dots, \underbrace{0, 1, 0, -1};$$

当 n 为 4 的倍数加 1 时, 满足条件的一个 A_n 是

$$\underbrace{0, 1, 0, -1}, \underbrace{0, 1, 0, -1}, \dots, \underbrace{0, 1, 0, -1}, 0.$$

当 n 为 4 的倍数加 2 或 3 时, 不存在满足条件的 E 数列 A_n .

习题 1.2.2 (2013 年东城二模) 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n$, $a_{4n-1} = 0$, $a_{4n+1} = 1$, ($n \in \mathcal{N}^*$).

(1) 求 a_4 , a_7 ;

(2) 是否存在正整数 T , 使得对任意的 $n \in \mathcal{N}^*$, 有 $a_{n+T} = a_n$;

(3) 设 $S = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$, 问 S 是否为有理数, 说明理由.

解 (1) $a_n : 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, \dots$, 于是 $a_4 = 1$, $a_7 = 0$.

(2) 不存在.

考虑 T 的模 4 的完全剩余系即可. (3) 由 (2), S 为无限不循环小数, 因此 S 不是有理数. (若要详细证明, 可以设循环节长度为 T_0 , 仿 (2) 证明)

习题 1.2.3 (2015 年北京) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq 36$, 且

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18, \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases} (n = 1, 2, \dots).$$

记集合 $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}$.

(1) 若 $a_1 = 6$, 写出集合 M 的所有元素;

(2) 若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数, 证明: M 的所有元素都是 3 的倍数;

(3) 求集合 M 的元素个数的最大值.

分析 第 (1) 小题是为了让解题者熟悉递推公式的铺垫题, 第 (2) 小题指出了数列的取值集合 M 的重要特征, 都比较简单. 对于第 (3) 小题, 由于首项 a_1 的取值范围只包含 36 个数, 因此可以采用列举的思路. 注意到递推公式中无论 a_n 与 18 的大小关系如何, 均会将 a_n 乘以 2, 所以结合 a_n 从第二项起均为偶数可以使列举的过程大幅缩短.

解 (1) 当 $a_1 = 6$ 时, 数列按以下规律变化:

$$6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow \cdots$$

因此集合 M 的所有元素为 6, 12, 24.

(2) 容易推出

引理 1 若 $3|a_n$, 则 $3|a_{n+1}$.

引理 2 如果 $3 \nmid a_n$, 则 $3 \nmid a_{n+1}$.

于是若集合 M 中存在一个元素为 3 的倍数, 也即存在某个 a_p 能被 3 整除, 那么由引理 1, 当 $n \geq p$ 时, $3|a_n$. 接下来用反证法证明当 $n < p$ 时, $3|a_n$.

若不然, 设存在 a_q , $q < p$ 且 $3 \nmid a_q$, 则由引理 2, 当 $n \geq q$ 时, $3 \nmid a_n$, 而 $3|a_p$, 矛盾.

因此原命题得证.

(3) 首先证明 M 的元素个数不可能多于 8.

容易知道, $1 \leq a_n \leq 36, n \in \mathbb{N}^*$ 且当 $n \geq 3$ 时, $4|a_n$. 接下来利用这一性质讨论不同的初值下, 数列 $\{a_n\}$ 中的第 3 项以及以后的项在集合 M 中产生的新元素.

若 $3|a_1$, 则由引理 1, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 有 $3|a_n$, 于是 $12|a_n$, 即 $a_n \in \{12, 24, 36\} (n \geq 3)$, 此时 M 的元素个数不可能多于 5;

若 $3 \nmid a_1$, 则由引理 2, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 有 $3 \nmid a_n$, 于是 $a_n \in \{4, 8, 16, 20, 28, 32\} (n \geq 3)$, 此时 M 的元素个数不可能多于 8.

综上, M 中的元素个数不可能多于 8.

事实上, 取 $a_1 = 1$, 则有 $M = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 28, 20\}$ 恰好含有 8 个元素, 因此所求集合 M 的元素个数的最大值为 8.

1.3 极端情形

1.3.1 绝对值之和的最值

例题 1.3.1

(2014 年 12 月北京市部分学校高三联考) 给定正奇数 n ($n \geq 5$), 数列 $\{a_n\} : a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 定义

$$E(a_1, a_2, \dots, a_n) = |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|$$

为数列 $\{a_n\}$ 的位差和.

(1) 当 $n = 5$ 时, 求数列 $\{a_n\} : 1, 3, 4, 2, 5$ 的位差和;

(2) 若位差和 $E(a_1, a_2, \dots, a_n) = 4$, 求满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数;

(3) 若位差和 $E(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$, 求满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数.

解 (1) 4.

(2) “1+1+1+1 型”有 C_{n-2}^2 个; “2+2”型有 $n-2$ 个; “1+1+2”型有 $2(n-2)$ 个.

因此总共有 $C_{n-2}^2 + 3(n-2) = \frac{1}{2}(n-2)(n+3)$ 个.

(3) 先考虑 $n = 5$ 的情形, 此时 $E = 12$, 很容易有以下构造:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

此时我们可以发现

$$E = (5-1) + (4-2) + (3-3) + (4-2) + (5-1) = 12.$$

也就是说, 这是当 $n = 5$ 时的最大位差和. 这个事实很容易推广到一般情形, 设 $n = 2k - 1$, 则

$$\begin{aligned} E(a_1, a_2, \dots, a_n) &= |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - (2k - 1)| \\ &\leq [k + 2 \cdot (k + 1) + 2 \cdot (k + 2) + \dots + 2 \cdot (2k - 1)] - [2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot (k - 1) + k] \\ &= 2k^2 - 2k = \frac{1}{2}(n^2 - 1). \end{aligned}$$

于是我们需要且只需要保证 $1, 2, 3, \dots, k$ 在后 k 个位置或 $k, k+1, k+2, \dots, 2k-1$ 在前 k 个位置即可. 为了达到这个目的, 可以先将 k 安排在任意一个位置, 然后将剩下的位置中的前一半中安排 $k+1, k+2, \dots, 2k-1$, 后一半中安排 $1, 2, 3, \dots, k-1$ 就可以了. 也就是说, 满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数为

$$(2k-1) \cdot (k-1)! \cdot (k-1)! = n \cdot \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right]^2.$$

例题 1.3.2

(2013 年朝阳一模) 设 $\tau(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ 是数 $1, 2, \dots, 10$ 的任意一个全排列, 定义 $S(\tau) = \sum_{k=1}^{10} |2x_k - 3x_{k+1}|$, 其中 $x_{11} = x_1$.

(1) 若 $\tau = (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$, 求 $S(\tau)$ 的值;

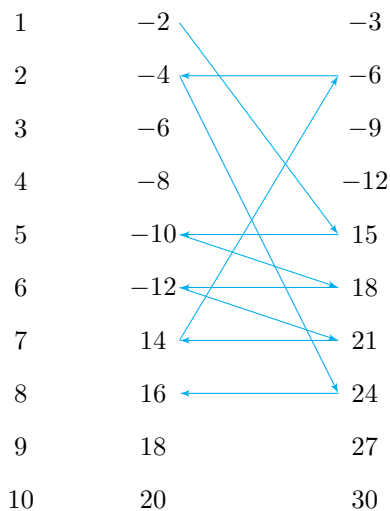
(2) 求 $S(\tau)$ 的最大值.

解 (1) $S(\tau) = 57$.

(2) 显然 $S(\tau)$ 的最大值不大于

$$(14 + 15 + 16 + 18 + 18 + 20 + 21 + 24 + 27 + 30) - (2 + 3 + 4 + 6 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 + 12) = 131,$$

接下来构造 $S(\tau) = 131$ 的情形. 不妨从 -2 开始, 指向一个符号相反的数, 如 15 , 然后对应到 -10 , 再指向一个符号相反的数, 如 18 , 然后对应到 -12 , $\dots$, 直到最后一个数 20 对应回 -3 , 如图.



此时对应的排列 $\tau = (1, 5, 6, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10)$, 满足 $S(\tau) = 131$.

所以 $S(\tau)$ 的最大值为 131 .

注 标答中只给出了使得 $S(\tau) = 131$ 成立的一种排列 $\tau = (1, 5, 6, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10)$, 但并未交代构造的过程.

1.3.2 上界与下界

例题 1.3.3

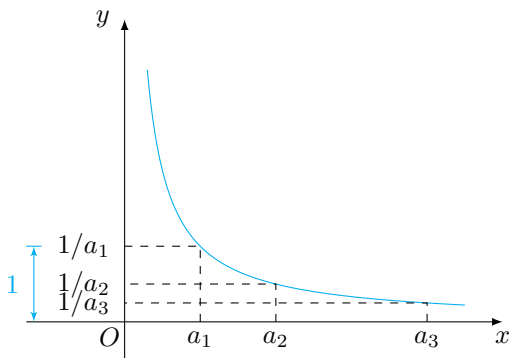
(2011 年东城高三第一学期期末) 已知集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中的元素都是正整数, 且 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, 集合 A 具有性质 M : 对任意的 $x, y \in A$, 且 $x \neq y$, 有 $|x - y| \geq \frac{xy}{25}$.

(1) 判断集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 是否具有性质 M ;

(2) 求证: $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \geq \frac{n-1}{25}$;

(3) 求 n 的最大值.

分析 $|x - y| \geq \frac{xy}{25}$, 即 $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \geq \frac{1}{25}$, 也就是集合 $A' = \left\{ \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n} \right\}$ 中的任何两个元素之间的距离都不小于 $\frac{1}{25}$. 由于 A' 中的元素都在区间 $(0, 1]$ 内, 因此元素个数是有限的. 在构造最多元素的集合 A' 时, 我们倾向于从 a_1 开始, 每次取尽量小的 a_i , 这样可以更有效的利用为数不多的区间长度.



解 (1) 由于 $\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\}$ 中两个元素之间的最小距离为

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \geq \frac{1}{25},$$

于是集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 具有性质 M ;

(2) 根据性质 M 的描述, 有

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \geq \frac{n-1}{25}.$$

(3) 对任意正整数 p, q 且 $1 \leq p < q \leq n$, 均有

$$\frac{q-p}{25} \leq \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q} < \frac{1}{p},$$

于是

$$q < \frac{25}{p} + p.$$

若 p 无法取得 5, 则 $n \leq 5$, 命题显然成立; 若 p 可以取得 5, 那么令 $p = 5$, 有 $q \leq 9$. 取 $q = n$, 可知 $n \leq 9$.

事实上, n 的最大值为 9, 下面就是 $n = 9$ 的两个例子:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20, 100\}.$$

1.3.3 最值原理

例题 1.3.4

(2015 年海淀高三第一学期期末) 已知集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (n \geq 3)$, 集合 $T \subseteq \{(x, y) | x \in S, y \in S, x \neq y\}$ 且满足: $\forall a_i, a_j \in S (i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j)$, $(a_i, a_j) \in T$ 与 $(a_j, a_i) \in T$ 恰有一个成立. 对于 T 定义

$$d_T(a, b) = \begin{cases} 1, & (a, b) \in T, \\ 0, & (b, a) \in T, \end{cases}$$

且

$$l_T(a_i) = d_T(a_i, a_1) + d_T(a_i, a_2) + \dots + d_T(a_i, a_{i-1}) + d_T(a_i, a_{i+1}) + \dots + d_T(a_i, a_n) (i = 1, 2, \dots, n).$$

- (1) 若 $n = 4$, $(a_1, a_2), (a_3, a_2), (a_2, a_4) \in T$, 求 $l_T(a_2)$ 的值及 $l_T(a_4)$ 的最大值;
 (2) 从 $l_T(a_1), l_T(a_2), \dots, l_T(a_n)$ 中任意删去两个数, 记剩下的 $n - 2$ 个数的和为 M . 求证:

$$M \geq \frac{1}{2}n(n - 5) + 3;$$

- (3) 对于满足 $l_T(a_i) < n - 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 的每一个集合 T , 集合 S 中是否都存在三个不同的元素 e, f, g , 使得 $d_T(e, f) + d_T(f, g) + d_T(g, e) = 3$ 恒成立, 并说明理由.

解 (1) $l_T(a_2) = 1$, $l_T(a_4)$ 的最大值为 2.

(2) 因为 $\sum_{i=1}^n l_T(a_i) = \frac{1}{2}n(n - 1)$, 且

$$\frac{1}{2}n(n - 1) - M \leq (n - 1) + (n - 2) = 2n - 3,$$

所以 $M \geq \frac{1}{2}n(n - 5) + 3$.

(3) 对于满足 $l_T(a_i) < n - 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 的每一个集合 T , 集合 S 中都存在三个不同的元素 e, f, g , 使得 $d_T(e, f) + d_T(f, g) + d_T(g, e) = 3$ 恒成立. 理由如下.

任取集合 T , 由 $l_T(a_i) < n - 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 可知, $l_T(a_1), l_T(a_2), \dots, l_T(a_n)$ 中存在最大数, 不妨记为 $l_T(f)$ (若最大数不唯一, 则任取一个). 因为 $l_T(f) < n - 1$, 所以存在 $e \in S$, 使得 $d_T(f, e) = 0$, 即 $(e, f) \in T$. 因为 $l_T(f) \geq 1$, 故集合

$$G = \{x \in S | (f, x) \in T\} \neq \emptyset.$$

我们断言集合 G 中一定存在元素 g 使得 $d_T(g, e) = 1$, 否则 $l_T(e) \geq l_T(f) + 1$, 与 $l_T(f)$ 是最大数矛盾. 故 $d_T(f, g) = 1, d_T(g, e) = 1$. 所以此时 $d_T(e, f) + d_T(f, g) + d_T(g, e) = 3$.

注 本题理解题意是关键. 可将问题直观化, 理解成一些拳击选手进行单循环赛, 胜者得 1 分, 负者得 0 分 (不考虑平局). 第 (3) 小题相当于在没有人全胜的条件下, 判断是否存在三名选手循环相克.

例题 1.3.5

(2006 年北京) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 a_1, a_2 是正整数, 且 $a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}| (n = 3, 4, 5, \dots)$, 则称 $\{a_n\}$ 为“绝对差数列”.

(1) 举出一个前五项不为零的“绝对差数列”(只要求写出前十项);

(2) 若“绝对差数列” $\{a_n\}$ 中, $a_{20} = 3, a_{21} = 0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 分别判断当 $n \rightarrow +\infty$ 时, a_n 与 b_n 的极限是否存在, 如果存在, 求出其极限值;

(3) 证明: 任何“绝对差数列”中总含有无穷多个为零的项.

解 (2) 从 a_{20} 开始, 数列为

$$\underbrace{3, 0, 3, 3, 0, 3, \dots}$$

于是当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 的极限不存在, b_n 的极限为 6.

(3)(i) 先证明任何“绝对差数列”中总含有为零的项.

用反证法. 假设“绝对差数列”中没有为零的项, 由于 $a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}|$, 故 $a_n < \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$, 同理有 $a_{n+1} < \max\{a_n, a_{n-1}\} \leq \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$, 于是

$$\max\{a_n, a_{n+1}\} < \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}.$$

记数列 $\{c_n\}$ 为 $\max\{a_1, a_2\}, \max\{a_3, a_4\}, \dots, \max\{a_{2n-1}, a_{2n}, \dots\}$, 则 $\{c_n\}$ 为无穷项单调递减数列, 且数列 $\{c_n\}$ 的各项均为正整数, 矛盾. 因此任何“绝对差数列”中总含有为零的项.

(ii) 再证明“绝对差数列”中总含有无穷多个为零的项. 由 (i), 设“绝对差数列”中 $a_k = 0, a_{k+1} = m$, 则从第 k 项起, 数列为

$$\underbrace{0, m, m, 0, m, m, \dots}$$

因此“绝对差数列”中总含有无穷多个为零的项.

1.3.4 课后习题

习题 1.3.1 (2016 年东城一模) 数列 $\{a_n\}$ 中, 给定正整数 $m (m > 1)$, $V(m) = \sum_{i=1}^{m-1} |a_{i+1} - a_i|$. 定义: 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{i+1} \leq a_i (i = 1, 2, \dots, m-1)$, 称数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项单调不减.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$, 求 $V(5)$.

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a, a_m = b$, 其中 $m > 1, m \in \mathbb{N}^*, a > b$, 求证: $V(m) = a - b$ 的充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项单调不减.

(3) 给定正整数 $m(m > 1)$, 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots, m)$, 且数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 m^2 , 求 $V(m)$ 的最大值与最小值 (写出答案即可).

解 (1) $V(5) = 8$.

(3) $V(m)$ 的最小值为 0, 最大值为 $\begin{cases} 4, m = 2, \\ 2m^2, m > 2. \end{cases}$

习题 1.3.2 (2014 年西城一模) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $\{a_n\} = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 从数列 $\{a_n\}$ 中选出 $k(k \geq 3)$ 项并按原顺序组成的新数列记为 $\{b_n\}$, 并称 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的 k 项子列. 例如数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个 4 项子列.

(1) 试写出数列 $\{a_n\}$ 的一个 3 项子列, 并使其为等差数列;

(2) 如果 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的一个 5 项子列, 且 $\{b_n\}$ 为等差数列, 证明: $\{b_n\}$ 的公差 d 满足 $-\frac{1}{8} < d < 0$;

(3) 如果 $\{c_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的一个 $m(m \geq 3)$ 项子列, 且 $\{c_n\}$ 为等比数列, 证明: $c_1 + c_2 + \dots + c_m \leq 2 - \frac{1}{2^{m-1}}$.

追问

(4) 写出 $\{a_n\}$ 的一个 2016 项子列 $\{d_n\}$, 使得 $\{d_n\}$ 为等差数列;

(5) 写出 $\{a_n\}$ 的一个 l 项子列 $\{e_n\}$, 其中 l 为奇数, 使得 $e_1 + e_2 + \dots + e_l = 1$.

解 (1) 答案不唯一. 例如 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$.

(2) 只需证明 $b_1 \neq 1$ 即可.

(3) 设 $c_1 = \frac{1}{n}$, 则 $c_2 \leq \frac{1}{n+1}, q = \frac{c_2}{c_1} \leq \frac{n}{n+1}$, 故

$$c_1 + c_2 + \dots + c_m \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^m}{1 - \frac{n}{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} - \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{m-1}} \leq 2 - \frac{1}{2^{m-1}}.$$

(4) 方法不唯一. 例如

$$\frac{2016}{2016!}, \frac{2015}{2016!}, \dots, \frac{1}{2016!}.$$

(5) 方法不唯一. 例如

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(l-1) \cdot l} + \frac{1}{l} = 1.$$

习题 1.3.3 (2014 年卓越联盟) 已知实数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_1| = 1$, $|a_{n+1}| = q|a_n|$, $n \in \mathbb{N}^*$, 常数 $q > 1$. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\sum_{k=1}^{n+1} |a_k| \leq 4|a_n|.$$

设 C 为所有满足上述条件的数列 $\{a_n\}$ 的集合.

(1) 求 q 的值;

(2) 设 $\{a_n\}, \{b_n\} \in C$, $m \in \mathbb{N}^*$, 且存在 $n_0 \leq m$, 使 $a_{n_0} \neq b_{n_0}$, 证明: $\sum_{k=1}^m a_k \neq \sum_{k=1}^m b_k$;

(3) 设集合 $A_m = \left\{ \sum_{k=1}^m a_k \mid \{a_n\} \in C \right\}$, $m \in \mathbb{N}^*$, 求 A_m 中所有正数之和.

解 (1) $q = 2$.

(2) 由题意, 不妨设 $a_l = 2^{l-1}, b_l = -2^{l-1}, a_{l+1} = b_{l+1}, a_{l+2} = b_{l+2}, \dots, a_m = b_m$, 则

$$\sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^m b_k = 2a_l + \sum_{k=1}^{l-1} a_k - \sum_{k=1}^{l-1} b_k \geq 2^l - 2 \sum_{k=1}^{l-1} 2^{k-1} = 2 > 0,$$

所以 $\sum_{k=1}^m a_k \neq \sum_{k=1}^m b_k$.

(3) A_m 中所有元素之和为 $2^{m-1} \cdot 2^{m-1} = 2^{2m-2}$. 显然 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为正数, 当且仅当 $a_m > 0$, 此时 $a_i (i = 1, 2, \dots, m-1)$ 的符号随意. 这样的数列共有 2^{m-1} 个. 配对求和可得.

习题 1.3.4 (2013 年北京) 已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的无穷数列, 该数列前 n 项的最大值记为 A_n , 第 n 项之后各项 $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ 的最小值记为 B_n , $d_n = A_n - B_n$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为 $2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, \dots$, 是一个周期为 4 的数列, 写出 d_1, d_2, d_3, d_4 的值;

(2) 设 d 是非负整数, 证明: $d_n = -d (n = 1, 2, 3, \dots)$ 的充分必要条件为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列;

(3) 证明: 若 $a_1 = 2, d_n = 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 $\{a_n\}$ 的项只能是 1 或 2, 且有无穷多项为 1.

解 (1) $d_1 = d_2 = 1, d_3 = d_4 = 3$.

(2)(充分性) 因为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 且 $d \geq 0$, 所以 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$.

因此 $A_n = a_n, B_n = a_{n+1}, d_n = -d (n = 1, 2, 3, \dots)$.

(必要性) 因为 $d_n = -d \leq 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 所以 $A_n = B_n + d_n \leq B_n$. 又因为 $a_n \leq A_n, a_{n+1} \geq B_n$, 所以 $a_n \leq a_{n+1}$. 故 $A_n = a_n, B_n = a_{n+1}$.

因此 $a_{n+1} - a_n = B_n - A_n = -d_n = d$, 即 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列.

(3) 因为 $a_1 = 2, d_1 = 1$, 所以 $A_1 = a_1 = 2, B_1 = A_1 - d_1 = 1$. 故对任意 $n \geq 1, a_n \geq B_1 = 1$.

假设 $\{a_n\} (n \geq 2)$ 中存在大于 2 的项, 设 m 为满足 $a_m > 2$ 的最小正整数, 则 $d_{m-1} \leq 0$, 矛盾.

所以对于任意 $n \geq 1$, 有 $a_n \leq 2$, 即非负整数列 $\{a_n\}$ 的各项只能是 1 或 2.

因为对任意 $n \geq 1, a_n \leq 2$, 所以 $A_n = 2$. 故 $B_n = A_n - d_n = 1$.

因此对任意 $n \geq 1$, 存在 m 满足 $m > n$, 且 $a_m = 1$, 即数列 $\{a_n\}$ 有无穷多项为 1.

第二章 核心篇

2.1 不变量与存在问题

2.1.1 不变量与存在性的否定

例题 2.1.1

(2013 年海淀一模) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 为平面直角坐标系上的两点, 其中 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$. 令 $\Delta x = x_1 - x_2$, $\Delta y = y_1 - y_2$, 若 $|\Delta x| + |\Delta y| = 3$, 且 $\Delta x \cdot \Delta y \neq 0$, 则称点 B 为点 A 的相关点, 记作 $B = \tau(A)$. 已知 $P_0(x_0, y_0)$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$) 为平面上的一个定点, 平面上点列 $\{P_i\}$ 满足: $P_i = \tau(P_{i-1})$, 且点 P_i 的坐标为 (x_i, y_i) , 其中 $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

(1) 请问: 点 P_0 的相关点有几个? 判断这些相关点是否在同一个圆上, 若在同一个圆上, 写出圆的方程; 若不在同一个圆上, 请说明理由;

(2) 求证: 若 P_0 与 P_n 重合, n 一定为偶数;

(3) 若 $P_0(1, 0)$, 且 $y_n = 100$, 记 $T = \sum_{i=0}^n x_i$, 求 T 的最大值.

解 (1) 共有 8 个: $(-2, \pm 1), (-1, \pm 2), (1, \pm 2), (2, \pm 1)$, 都在圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 5$ 上.

(2) 考虑所有向量的坐标之和;

(3) 当 $50 \leq n \leq 100$ 时, $T_{\max} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{205}{2}n - 5049$; 当 $n > 100$ 时, $T_{\max} = n^2 + 2n + \frac{(-1)^n + 1}{2}$. 注意利用排序不等式.

例题 2.1.2

(2012 年朝阳二模) 已知数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$) 满足 $a_1 = a_n = 0$, 且当 $2 \leq k \leq n$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 时, $(a_k - a_{k-1})^2 = 1$, 令 $S(A_n) = \sum_{i=1}^n a_i$.

(1) 写出 $S(A_5)$ 的所有可能的值;

(2) 求 $S(A_n)$ 的最大值;

(3) 是否存在数列 A_n , 使得 $S(A_n) = \frac{(n-3)^2}{4}$? 若存在, 求出数列 A_n ; 若不存在, 说明理由.

解 (1) $S(A_5)$ 的所有可能的值为 $4, 2, 0, -2, -4$.

(2) 显然 n 为奇数. 考虑数列 A_n 的差分序列, 可知 $S(A_n)$ 的最大值为 $\frac{(n-1)^2}{4}$.

(3) $S(A_n)$ 的奇偶性为不变量. 由于

$$\frac{(n-1)^2}{4} - \frac{(n-3)^2}{4} = n-2$$

为奇数, 矛盾. 所以不存在数列 A_n , 使得 $S(A_n) = \frac{(n-3)^2}{4}$.

2.1.2 半不变量与存在性的肯定

例题 2.1.3

(2008 年北京) 对于每项均是正整数的数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$, 定义变换 T_1 , T_1 将数列 A 变换成数列

$$T_1(A): n, a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1.$$

对于每项均是非负整数的数列 $B: b_1, b_2, \dots, b_m$, 定义变换 T_2 , T_2 将数列 B 各项从大到小排列, 然后去掉所有为零的项, 得到数列 $T_2(B)$; 又定义

$$S(B) = 2(b_1 + 2b_2 + \dots + mb_m) + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_m^2.$$

设 A_0 是每项均为正整数的有穷数列, 令 $A_{k+1} = T_2(T_1(A_k)) (k = 0, 1, 2, \dots)$.

(1) 如果数列 A_0 为 $5, 3, 2$, 写出数列 A_1, A_2 ;

(2) 对于每项均是正整数的有穷数列 A , 证明: $S(T_1(A)) = S(A)$;

(3) 证明: 对于任意给定的有穷正整数列 A_0 , 存在正整数 K , 当 $k \geq K$ 时, $S(A_{k+1}) = S(A_k)$.

解 (1) $5, 3, 2 \rightarrow 4, 3, 2, 1 \rightarrow 4, 3, 2, 1$.

(2) $S(T_1(A)) - S(A) = 0$.

(3) 对于任意有穷正整数列 A , 首先证明 $S(T_2(A)) \leq S(A)$ (排序不等式), 所以 $S(A_{k+1}) \leq S(A_k)$. 而 $S(A) \geq 0$, 所以存在正整数 K , 当 $k \geq K$ 时, $S(A_{k+1}) = S(A_k)$.

例题 2.1.4

(2013 年西城二模) 已知集合 $S_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \text{ 是正整数 } 1, 2, \dots, n \text{ 的一个排列}\} (n \geq 2)$, 函数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

对于 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n$, 定义:

$$b_1 = 0, b_i = \sum_{j=1}^{i-1} g(a_i - a_j), i \geq 2, i \in \mathbb{N},$$

称 b_i 为 a_i 的满意指数. 排列 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的生成列; 排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为排列 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 的母列.

(1) 当 $n=6$ 时, 写出排列 $3, 5, 1, 4, 6, 2$ 的生成列及排列 $0, -1, 2, -3, 4, 3$ 的母列.

(2) 证明: 若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ 为 S_n 中两个不同排列, 则它们的生成列也不同;

(3) 对于 S_n 中的排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 定义变换 τ : 将排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 从左至右第一个满意指数为负数的项调至首项, 其它各项顺序不变, 得到一个新的数列. 证明: 一定可以经过有限次变换 τ 将排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 变换为各项满意指数均为非负数的排列.

解 (1) 当 $n=6$ 时, $3, 5, 1, 4, 6, 2$ 的生成列为 $0, 1, -2, 1, 4, -3$; $0, -1, 2, -3, 4, 3$ 的母列为 $3, 2, 4, 1, 6, 5$ (从后往前推断).

(2) 只需要证明若一个排列存在母列, 则母列唯一.

设排列 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 存在母列, 则由 b_n 容易唯一确定 a_n , a_n 为排列 $1, 2, 3, \dots, n$ 中第 $\frac{n+1+b_n}{2}$ 个数; 进而由排列 $1, 2, 3, \dots, n$ 去掉 a_n 得到新排列, 用类似的方法可以由 b_{n-1} 唯一确定 a_{n-1} , a_{n-1} 为新排列中第 $\frac{n+b_{n-1}}{2}$ 个数; 依次递推, 排列 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 若存在母列, 则母列唯一.

(3) 设排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的生成列为 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 且 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \geq 0, b_k \leq -1$, 则进行一次 τ 变换后, $a_1, a_2, \dots, a_n$ 调整为 $a_k, a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$, 设该排列的生成列为 $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$. 考虑

$$\begin{aligned} (b'_1 + b'_2 + \dots + b'_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_n) &= 2[g(a_1 - a_k) + g(a_2 - a_k) + \dots + g(a_{k-1} - a_k)] \\ &= -2b_k \geq 2, \end{aligned}$$

于是经过一次 τ 变换后, 生成列的各项之和至少增加 2. 显然生成列的各项之和有界 $\frac{n(n-1)}{2}$, 这就意味着经过有限次 τ 变换后, 生成列各项必然均为非负数, 原命题得证.

例题 2.1.5

(2012 年朝阳高三期中考试) 给定一个 n 项的实数列 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 任意选取一个实数 c , 变换 $T(c)$ 将数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 变换为数列 $|a_1 - c|, |a_2 - c|, \dots, |a_n - c|$, 再将得到的数列继续实施这样的变换, 这样的变换可以连续进行多次, 并且每次所选择的实数 c 可以不相同, 第 $k (k \in \mathbb{N}^*)$ 次变换记为 $T_k(c_k)$, 其中 c_k 为第 k 次变换时选择的实数, 如果通过 k 次变换后, 数列中的各项均为 0, 则称 $T_1(c_1), T_2(c_2), \dots, T_k(c_k)$ 为“ k 次归零变换”.

(1) 对数列: $1, 3, 5, 7$ 给出一个“ k 次归零变换”, 其中 $k \leq 4$;

(2) 证明: 对任意 n 项数列, 都存在“ n 次归零变换”;

(3) 对于数列 $1, 2^2, 3^3, \dots, n^n$, 是否存在“ $n-1$ 次归零变换”? 请说明理由.

解 (3) 数列 $1, 2^2, 3^3, \dots, n^n$, 不存在“ $n-1$ 次归零变换”, 证明如下.

当 $n=2$ 时, 显然数列 $1, 4$ 无法通过 1 次 $T(c)$ 变换归零.

数列 $1, 2^2, 3^3, \dots, n^n$ 的极差为 $n^n - 1$, 当 $n \geq 3$ 时, 经过 1 次 $T(c)$ 变换后.

1° 若 $c \geq n^n$ 或 $c \leq 1$, 则极差仍然为 $n^n - 1$;

2° 若 $(n-1)^{n-1} \leq c < n^n$, 则极差至少为 $(n-1)^{n-1} - 1$;

3° 若 $1 < c < (n-1)^{n-1}$, 则极差至少为 $n^n - (n-1)^{n-1}$;

综上, 经过 1 次 $T(c)$ 变换后极差至少为

$$\min \{n^n - 1, (n-1)^{n-1} - 1, n^n - (n-1)^{n-1}\} = (n-1)^{n-1} - 1.$$

递推下去, 数列 $1, 2^2, 3^3, \dots, n^n$ 经过 $n-2$ 次 $T(c)$ 变换后极差至少为 $2^2 - 1 = 3$, 此时无法通过 1 次 $T(c)$ 变换归零. 综上, 对于数列 $1, 2^2, 3^3, \dots, n^n$, 不存在“ $n-1$ 次归零变换”.

2.1.3 课后习题

习题 2.1.1 (2012 年西城二模) 若 $A_n = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ ($a_i = 0$ 或 1 , $i = 1, 2, \dots, n$), 则称 A_n 为 0 和 1 的一个 n 位排列. 对于 A_n , 将排列 $\overline{a_n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$ 记为 $R^1(A_n)$; 将排列 $\overline{a_{n-1} a_n a_1 \cdots a_{n-2}}$ 记为 $R^2(A_n)$; 依次类推, 直至 $R^n(A_n) = A_n$. 对于排列 A_n 和 $R^i(A_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), 它们对应位置数字相同的个数减去对应位置数字不同的个数, 叫做 A_n 与 $R^i(A_n)$ 的相关值, 记作 $t(A_n, R^i(A_n))$. 例如 $A_3 = \overline{110}$, 则 $R^1(A_3) = \overline{011}$, $t(A_3, R^1(A_3)) = -1$. 若 $t(A_n, R^i(A_n)) = -1$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), 则称 A_n 为最佳排列.

(1) 写出所有的最佳排列 A_3 ;

(2) 证明: 不存在最佳排列 A_5 ;

(3) 若某个 A_{2k+1} (k 是正整数) 为最佳排列, 求排列 A_{2k+1} 中 1 的个数.

解 (1) $\overline{001}, \overline{010}, \overline{100}, \overline{011}, \overline{101}, \overline{110}$.

(2) 考虑 $a_5 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5$ 共 5 次变化中, 奇偶性只变化 3 次, 矛盾.

(3) 假设 A_{2k+1} 中有 x 个 1, $2k+1-x$ 个 0, 则

$$x(2k+1-x) = \frac{2k \cdot (k+1)}{2},$$

于是 $x = k$ 或 $x = k+1$.

习题 2.1.2 (2012 年四中高三入学测试) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 ($n = 1, 2, 3, \dots$), 按如下方式定义数列 $\{a_n\}$: $a_1 = m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), 对任意 $k \in \mathbb{N}^*, k > 1$, 设 a_n 为满足 $0 \leq a_k \leq k-1$ 的整数, 且 k 整除 S_k .

(1) $m = 9$ 时, 试给出 $\{a_n\}$ 的前 6 项;

(2) 证明: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, 有 $\frac{S_{k+1}}{k+1} < \frac{S_k}{k} + 1$;

(3) 证明: 对任意的 m , 数列 $\{a_n\}$ 必从某项起为常数列.

解 (1) $m = 9$ 时, $a_1 = 9$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 0$, $a_5 = 3$, $a_6 = 3$;

(2) 用分析法证明:

$$\begin{aligned}\frac{S_{k+1}}{k+1} < \frac{S_k}{k} + 1 &\Leftrightarrow kS_{k+1} < (k+1)S_k + k(k+1) \\ &\Leftrightarrow k(S_k + a_{k+1}) < (k+1)S_k + k(k+1) \\ &\Leftrightarrow a_{k+1} < \frac{S_k}{k} + k + 1,\end{aligned}$$

而 $0 \leq a_{k+1} \leq k$, 所以命题成立.

(3) 记数列 $b_n = \frac{S_n}{n}$, 则根据数列 $\{a_n\}$ 的定义数列 $\{b_n\}$ 也是一个正整数数列. 于是根据 $b_{n+1} - b_n < 1$, 有 $b_{n+1} - b_n \leq 0$. 下面我们分两步证明该命题:

第一步证明: 如果数列 $\{b_n\}$ 从某项起是常数列, 那么 $\{a_n\}$ 从某项起为常数列.

假设 $b_k = b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = x$, 则

$$\frac{S_k}{k} = \frac{S_{k+1}}{k+1} = \frac{S_{k+2}}{k+2} = \cdots = x,$$

于是

$$S_k = kx, S_{k+1} = kx + x, S_{k+2} = kx + 2x, \cdots,$$

于是 $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = x$. 这就证明了如果数列 $\{b_n\}$ 从第 k 项起是常数列, 那么 $\{a_n\}$ 从第 $k+1$ 项起是常数列.

第二步证明“ $\{b_n\}$ 从第 k 项起是常数列.”用反证法:

如果命题“ $\{b_n\}$ 从某项起是常数列”不成立, 即“ $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{N}^*, p > k$, 使得 $b_p \neq b_k$ ”. 于是存在 m 个递增正整数 $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_m$, 使得

$$b_{k_1} \neq b_1, b_{k_2} \neq b_{k_1}, \cdots, b_{k_m} \neq b_{k_{m-1}},$$

而根据 $b_{n+1} - b_n \leq 0$, 可得

$$b_1 > b_{k_1} > b_{k_2} > \cdots > b_{k_m}.$$

由于 $\{b_n\}$ 为正整数列, $b_{k_m} \geq 1, b_1 \geq m+1$, 与 $b_1 = m$ 矛盾.

这样就证明了数列 $\{b_n\}$ 从某项起是常数列.

注 对于数列的递推过程, $\frac{S_k}{k}$ 为其特征量.

习题 2.1.3 (2013 年房山一模) 对于实数 x , 将满足“ $0 \leq y < 1$ 且 $x - y$ 为整数”的实数 y 称为实数 x 的小数部分, 用 $\langle x \rangle$ 记号表示. 例如 $\langle 1.2 \rangle = 0.2, \langle -1.2 \rangle = 0.8, \langle \frac{8}{7} \rangle = \frac{1}{7}$. 对于实数 a , 无穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下条件:

$$a_1 = \langle a \rangle, a_{n+1} = \begin{cases} \langle \frac{1}{a_n} \rangle, & a_n \neq 0 \\ 0, & a_n = 0 \end{cases}, \text{ 其中 } n = 1, 2, 3, \cdots$$

- (1) 若 $a = \sqrt{2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 当 $a > \frac{1}{4}$ 时, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_n = a$, 求符合要求的实数 a 构成的集合 A ;
 (3) 若 a 是有理数, 设 $a = \frac{p}{q}$ (p 是整数, q 是正整数, p, q 互质), 对于大于 q 的任意正整数 n , 是否都有 $a_n = 0$ 成立, 证明你的结论.

解 (1) $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$; $a_1 = \langle \frac{1}{a_1} \rangle = \langle \sqrt{2} + 1 \rangle = \sqrt{2} - 1$; 一般的, $a_n = \sqrt{2} - 1$.

(2) 根据题意, $\langle a \rangle = a$ 且 $\langle \frac{1}{a} \rangle = a$. $\langle a \rangle = a \Leftrightarrow 0 \leq a < 1$, 因此只需要考虑 $\begin{cases} \frac{1}{4} < a < 1 \\ \langle \frac{1}{a} \rangle = a \end{cases}$.

此时 $1 < \frac{1}{a} < 4$, 显然 $\frac{1}{a}$ 不能取整数, 因此分下面三种情形讨论.

1° $1 < \frac{1}{a} < 2$ 时, 由 $\langle \frac{1}{a} \rangle = \frac{1}{a} - 1 = a$, 解得 $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ($a = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ 舍去).

2° $2 < \frac{1}{a} < 3$ 时, 由 $\langle \frac{1}{a} \rangle = \frac{1}{a} - 2 = a$, 解得 $a = -1 + \sqrt{2}$ ($a = -1 - \sqrt{2}$ 舍去).

3° $3 < \frac{1}{a} < 4$ 时, 由 $\langle \frac{1}{a} \rangle = \frac{1}{a} - 3 = a$, 解得 $a = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ ($a = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ 舍去).

综上, 所求的集合 A 为

$$\left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, -1 + \sqrt{2}, \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right\}.$$

(3) 显然 a_n 均为有理数, 设 $a_n = \frac{p_n}{q_n}$. 此时 $1 \leq p_n < q_n$. 由递推公式可得, 当 $1 \leq n \leq q, n \in \mathbb{N}^*$ 时, $q_{n+1} = p_n$. 因此 $1 \leq p_n < p_{n-1}$, 也就是说 $\{p_n\}$ 递减. 又 $p_1 \leq q_1 = q$, 但从 1 到 q 只有 q 个正整数, 矛盾. 因此结论得证.

习题 2.1.4 (2012 年西城一模) 对于数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n (a_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n)$, 定义“ T 变换”: T 将数列 A_n 变换成数列 $B_n: b_1, b_2, \dots, b_n$, 其中 $b_i = |a_i - a_{i+1}| (i = 1, 2, \dots, n-1)$, 且 $b_n = |a_n - a_1|$, 这种“ T 变换”记作 $B_n = T(A_n)$. 继续对数列 B_n 进行“ T 变换”, 得到数列 $C_n, \dots$, 依此类推, 当得到的数列各项均为 0 时变换结束.

- (1) 试问 $A_3: 4, 2, 8$ 和 $A_4: 1, 4, 2, 9$ 经过不断的“ T 变换”能否结束? 若能, 请依次写出经过“ T 变换”得到的各数列; 若不能, 说明理由;
 (2) 试问 $A_3: 2, 6, 4$ 经过不断的“ T 变换”能否结束? 若能, 请依次写出经过“ T 变换”得到的各数列; 若不能, 说明理由;
 (3) 求 $A_3: a_1, a_2, a_3$ 经过有限次“ T 变换”后能够结束的充要条件;
 (4) 设 $A_3: a_1, a_2, a_3$, $B_3 = T(A_3)$, 若 $B_3: b, 2, a (a \geq b)$, 且 B_3 的各项之和为 2012.
 ① 求 a, b ;
 ② 若数列 B 再经过 k 次“ T 变换”得到的数列各项之和最小, 求 k 的最小值, 并说明理由.
 (5) 证明: $A_4: a_1, a_2, a_3, a_4$ 一定能经过有限次“ T 变换”后结束.

解 (1) $4, 2, 8 \rightarrow 2, 6, 4 \rightarrow 4, 2, 2 \rightarrow 2, 0, 2 \rightarrow 2, 2, 0 \rightarrow 0, 2, 2 \rightarrow 2, 0, 2 \rightarrow \dots$

$1, 4, 2, 9 \rightarrow 3, 2, 7, 8 \rightarrow 1, 5, 1, 5 \rightarrow 4, 4, 4, 4 \rightarrow 0, 0, 0, 0$

所以 A_3 不能经过若干次“ T 变换”结束, A_4 可以经过 4 次“ T 变换”结束.

(2) $2, 6, 4 \rightarrow 4, 2, 2 \rightarrow 2, 0, 2 \rightarrow 2, 2, 0 \rightarrow 0, 2, 2 \rightarrow 2, 0, 2 \rightarrow \dots$, 所以 A_3 不能经过若干次“ T 变换”结束.

(3) 记全零数列为 $O_n: \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n\text{个}}$, 常数列为 $I_n: \underbrace{m, m, \dots, m}_{n\text{个}}$.

此外, 若 $T(A_n) = B_n$, 则 $A_n = T^{-1}(B_n)$, 称 T^{-1} 为“ T 变换”的逆变换. 显然 $T^{-1}(O_n) = I_n$.
由于

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = |a_3 - a_1| \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3,$$

所以 $T^{-1}(I_n)$ 也为常数列. 因此 A_3 经过有限次“ T 变换”后能够结束的充要条件是 A_3 是常数列.

(4)① $a = 1006, b = 1004$;

② 当 $x \geq 12$ 时, 有

$$x, 2, x+2 \rightarrow x-2, x, 2 \rightarrow 2, x-2, x-4 \rightarrow x-4, 2, x-6 \rightarrow x-6, x-8, 2 \rightarrow 2, x-10, x-8 \rightarrow x-12, 2, x-10$$

也就是说数列 $x, 2, x+2$ 经过 6 次“ T 变换”变为 $x-12, 2, x-10$, 于是数列 $1004, 2, 1006$ 经过 6×83 次“ T 变换”后变为 $8, 2, 10$. 而 $8, 2, 10 \rightarrow 6, 8, 2 \rightarrow 2, 6, 4 \rightarrow 4, 2, 2 \rightarrow 2, 0, 2 \rightarrow 2, 2, 0 \rightarrow 0, 2, 2 \rightarrow 2, 0, 2 \rightarrow \dots$, 进入循环. 于是 B 经过 $6 \times 83 + 4 = 502$ 次“ T 变换”后得到的数列各项之和最小, k 的最小值为 502.

(5) 将数列的首项与末项视为相邻, 考虑数列 A_4 中的最大项 $\max(A_4)$ 与数列 $T(A_4)$ 中的最大项 $\max(T(A_4))$. 显然 $\max(T(A_4)) = |a_i - a_j| \leq \max(a_i, a_j) \leq \max(A_4)$ (其中 a_i 和 a_j 是数列 A_4 中的相邻两项). 于是, 容易知道:

当 A_4 中没有为零的项或为零的项与最大项不相邻时, $\max(T(A_4)) < \max(A_4)$, 记为 α 型;

当 A_4 中存在为零的项与最大项相邻时, $\max(T(A_4)) = \max(A_4)$, 记为 β 型.

若证明了命题 P : 非 O_4 的 β 型数列一定可以通过有限次“ T 变换”转化为 α 型数列.

那么由于 α 型数列的最大项会因为“ T 变换”减小, 于是随着“ T 变换”的进行, α 型数列最终将不再出现, 因此数列经过有限次“ T 变换”可以得到 O_4 , 即命题得证.

下面证明命题 P , 以下设 $a, b, c > 0$, $a > b$, $a > c$, $b \neq c$, $T_n(A_n) = T(T_{n-1}(A_n))$.

非 O_4 的 β 型数列有以下几种:

① 三个不同正数及零

$A_4: 0, a, b, c$, $T(A_4) = a, a-b, |b-c|, c$ 为 α 型数列.

② 两个不同正数及零

$B_4: 0, a, b, a$, $T(B_4) = a, a-b, a-b, a$ 为 α 型数列.

$C_4: 0, a, a, b$, $T(B_4) = a, 0, a-b, b$, $T_2(B_4) = a, a-b, |a-2b|, a-b$ 为 α 型数列.

$D_4: 0, 0, a, b$, $T(D_4) = 0, a, a-b, b$, $T_2(D_4) = a, b, |a-2b|, b$ 为 α 型数列.

$E_4: 0, a, 0, b$, $T(E_4) = a, a, b, b$ 为 α 型数列.

③ 一个正数及零

$F_4: 0, a, a, a$, $T(F_4) = a, 0, 0, a$, $T_2(F_4) = a, 0, a, 0$, $T_3(F_4) = a, a, a, a$ 为 α 型数列.

$G_4: 0, 0, a, a$, $T(G_4) = 0, a, 0, a$, $T_2(G_4) = a, a, a, a$, 为 α 型数列.

$H_4: 0, a, 0, a$, $T(H_4) = a, a, a, a$, 为 α 型数列.

$J_4: 0, 0, 0, a$, $T(J_4) = 0, 0, a, a$, $T_2(J_4) = 0, a, 0, a$, $T_3(J_4) = a, a, a, a$, 为 α 型数列.

由于“ T 变换”的轮换对称性, 对其他非 O_4 的 β 型数列也可以通过若干次“ T 变换”变为 α 型数列. 这就证明了非 O_4 的 β 型数列一定可以经过有限次“ T 变换”变换转化为 α 型数列.

2.2 调整法与最值问题

2.2.1 调整方案问题

例题 2.2.1

证明: (排序不等式) 若两组实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, 则

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \dots + a_n b_{i_n} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n,$$

其中 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列.

解 略.

例题 2.2.2

(2014 年北京) 对于数对序列 $P: (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, 记 $T_1(P) = a_1 + b_1$,

$$T_k(P) = b_k + \max\{T_{k-1}(P), a_1 + a_2 + \dots + a_k\} \quad (2 \leq k \leq n),$$

其中 $\max\{T_{k-1}(P), a_1 + a_2 + \dots + a_k\}$ 表示 $T_{k-1}(P)$ 和 $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ 两个数中最大的数.

- (1) 对于数对序列 $P: (2, 5), (4, 1)$, 求 $T_1(P)$, $T_2(P)$ 的值;
- (2) 记 m 为 a, b, c, d 四个数中最小的数, 对于由两个数对 (a, b) , (c, d) 组成的数对序列 $P: (a, b)$, (c, d) 和 $P': (c, d)$, (a, b) , 试分别对 $m = a$ 和 $m = d$ 时两种情况比较 $T_2(P)$ 和 $T_2(P')$ 的大小;
- (3) 在由 5 个数对 $(11, 8)$, $(5, 2)$, $(16, 11)$, $(11, 11)$, $(4, 6)$ 组成的所有数对序列中, 写出一个数对序列 P 使 $T_5(P)$ 最小, 并写出 $T_5(P)$ 的值. (只需写出结论)

分析 解决问题的关键在于如何对抽象的定义给出直观可操作的解释. 注意到题中的 $T_k(P)$ 是递归定义的, 因此可以借用“路径选择”的方式进行思考. 第 (3) 小题需要研究一个最优问题, 解决方法是充分利用第 (2) 小题的结果, 通过逐步调整的方式得到最优排列.

解 将数对序列 P 按矩阵列写, 其中第 k 列为数对 (a_k, b_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, 则 $T_k(P)$ 就是 a_1 的位置到 b_k 的位置 (左上角到右下角) 的路径中, 经过 (每次只能往右或往下移动) 的数之和 (定义为路径的长度) 的最大值, 如图所示.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & \rightarrow & a_2 & \rightarrow & a_3 & & a_4 & & a_5 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ b_1 & & b_2 & & b_3 & \rightarrow & b_4 & \rightarrow & b_5 \end{array}$$

(1) 根据题意, 有 $T_1(P) = 7$, 而 $T_2(P) = 8$, 如图.

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 4 \\ \downarrow & & \\ 5 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

(2) 根据题意, 有

$$\begin{aligned} T_2(P) &= a + d + \max\{b, c\} = (a + b + c + d) - \min\{b, c\}, \\ T_2(P') &= b + c + \max\{a, d\} = (a + b + c + d) - \min\{a, d\}, \end{aligned}$$

其中 $\min\{x, y\}$ 表示 x, y 中的最小数. 当 $m = a$ 和 $m = d$ 时, 均有

$$\min\{b, c\} \geq \min\{a, d\},$$

从而有 $T_2(P) \leq T_2(P')$.

(3) 可以按下图排列, 使得路径符合要求 (路径不唯一, 例如保证 $(4, 6)$ 在 $(16, 11)$ 左边, $(11, 8)$ 和 $(5, 2)$ 在 $(16, 11)$ 右边的排法均可).

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \rightarrow & 11 & \rightarrow & 16 & & 11 & & 5 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 6 & & 11 & & 11 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & 2 \end{array}$$

此时 $T_5(P) = 52$.

拓展 为了说明第 (3) 小题中数对序列的构造的过程, 我们先证明一个引理.

引理 设 (a_k, b_k) 和 (a_{k+1}, b_{k+1}) 是数对序列 P 中的相邻两列, 若 $a_k, b_k, a_{k+1}, b_{k+1}$ 中的最小数为 a_{k+1} 或 b_k , 那么交换这两列后得到的数对序列 P' 满足 $T_n(P') \leq T_n(P)$.

引理的证明 数对序列 P 如图.

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{k-1} & b_k & b_{k+1} & b_{k+2} & \cdots & b_n \end{array}$$

按路径中“ $\downarrow$ ”发生的位置, 列举出所有路径 $l_i(P)$ (表示路径中包含 $a_i \rightarrow b_i$) 的长度 $S_i(P)$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$S_i(P) = \sum_{k=1}^i a_k + \sum_{k=i}^n b_k,$$

这样就有

$$T_n(P) = \max\{S_1(P), S_2(P), \dots, S_n(P)\}.$$

交换后的数对序列 P' 对应的路径 $l_i(P')$ 均发生了改变, 但是只有 $S_k(P')$ 与 $S_{k+1}(P')$ 发生了变化.

根据第 (2) 小题的结果, 有

$$\max\{S_k(P'), S_{k+1}(P')\} \leq \max\{S_k(P), S_{k+1}(P)\},$$

因此

$$T_n(P') = \max\{S_1(P'), S_2(P'), \dots, S_n(P')\} \leq T_n(P),$$

这样就证明了引理.

应用引理, 可以先将数对序列优化为 (4, 6) 为第一列, 同时 (5, 2) 为最后一列, 接下来将 (11, 11) 和 (11, 8) 分别放在第二列和第四列的位置, 而将 (16, 11) 安排在第三列的位置, 可以使得结果最优.

由于调整过程可能不会改变 $T_n(P)$ 的值, 因此实际上使得结果最优的排列方法并不唯一. 事实上, 使得 $T_5(P)$ 达到最小值 52 的序列还有以下两个:

$$(4, 6), (16, 11), (11, 11), (11, 8), (5, 2); \quad (11, 11), (4, 6), (16, 11), (11, 8), (5, 2).$$

2.2.2 调整次数问题

例题 2.2.3

(2015 年海淀二模) 对于数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$, 经过变换 T : 交换 A 中某相邻两段的位置 (数列 A 中的一项或连续的几项称为一段), 得到数列 $T(A)$. 例如, 数列 A :

$$a_1, \dots, a_i, \underbrace{a_{i+1}, \dots, a_{i+p}}_M, \underbrace{a_{i+p+1}, \dots, a_{i+p+q}}_N, a_{i+p+q+1}, \dots, a_n,$$

经交换 M 、 N 两段位置, 变换为数列 $T(A)$:

$$a_1, \dots, a_i, \underbrace{a_{i+p+1}, \dots, a_{i+p+q}}_N, \underbrace{a_{i+1}, \dots, a_{i+p}}_M, a_{i+p+q+1}, \dots, a_n,$$

其中 $p \geq 1$, $q \geq 1$. 设 A_0 是有穷数列, 令 $A_{k+1} = T(A_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

(1) 如果数列 A_0 为 3, 2, 1, 且 A_2 为 1, 2, 3, 写出数列 A_1 (写出一个即可);

(2) 如果数列

$$A_0: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,$$

$$A_1: 5, 4, 9, 8, 7, 6, 3, 2, 1,$$

$$A_2: 5, 6, 3, 4, 9, 8, 7, 2, 1,$$

$$A_5: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

写出数列 A_3 , A_4 (写出一组即可);

(3) 如果数列 A_0 为等差数列: 2015, 2014, $\dots$, 1, A_n 为等差数列: 1, 2, $\dots$, 2015, 求 n 的最小值.

解 (1) $A_1: 2, 1, 3$ 或者 $A_1: 1, 3, 2$ 或者 $A_1: 3, 1, 2$ 或者 $A_1: 2, 3, 1$.

(2) $A_3: 5, 6, 7, 2, 3, 4, 9, 8, 1$, $A_4: 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 9$.

(3) 考虑数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 中满足 $a_i < a_{i+1}$ 的数对 (a_i, a_{i+1}) 的个数, 我们称之为“顺序数”.

等差数列 $A_0: 2015, 2014, \dots, 1$ 的顺序数为 0, 等差数列 $A_n: 1, 2, \dots, 2015$ 的顺序数为 2014.

引理 1 对于一个数列, 经过变换 T , 数列的顺序数至多增加 2.

事实上, 假设“ T 变换”前后的数列分别为

$$\begin{aligned} & a, \dots, b, \underbrace{c, \dots, d}, \underbrace{e, \dots, f}, g, \dots, h \\ & a, \dots, b, \underbrace{e, \dots, f}, \underbrace{c, \dots, d}, g, \dots, h \end{aligned}$$

显然至多有三个数对位置变化. 假设三个数对的元素都改变顺序, 使得相应的顺序数增加, 即由 $b > c, d > e, f > g$ 变为 $b < e, f < c, d < g$, 分别将三个不等式相加得 $b + d + f > c + e + g$ 与 $b + d + f < c + e + g$ 矛盾. 所以经过变换 T , 数列的顺序数至多增加 2.

引理 2 第一次和最后一次变换, 顺序数均改变 1.

所以 $2(n-2) + 2 \geq 2014$, 即 $n \geq 1008$.

下面给出 $n = 1008$ 的例子.

$$\begin{aligned} A_0 &: \underbrace{2015, 2014, \dots, 1010, 1009, 1008, 1007}_{}, 1006, 1005, \dots, 2, 1 \\ A_1 &: 1008, \underbrace{1007, 2015, 2014, \dots, 1010, 1009, 1006}_{}, 1005, \dots, 2, 1 \\ A_2 &: 1008, 1009, \underbrace{1006, 1007, 2015, 2014, \dots, 1012, 1011}_{}, \underbrace{1010, 1005}_{}, 1004, 1003, \dots, 2, 1 \\ A_3 &: 1008, 1009, 1010, \underbrace{1005, 1006, 1007, 2015, 2014, \dots, 1012, 1011}_{}, \underbrace{1004}_{}, 1003, \dots, 2, 1 \\ & \dots\dots\dots \\ A_{1007} &: \underbrace{1008, \dots, 2014}_{}, \underbrace{1, \dots, 1007}_{}, 2015 \\ A_{1008} &: 1, \dots, 1007, 1008, \dots, 2014, 2015 \end{aligned}$$

综上所述, n 的最小值为 1008.

例题 2.2.4

(2013 年海淀二模) 设 A 是由 $m \times n$ 个实数组成的 m 行 n 列的数表, 如果某一行 (或某一列) 各数之和为负数, 则改变该行 (或该列) 中所有数的符号, 称为一次“操作”.

(1) 数表 A 如表 1 所示, 若经过两次“操作”, 使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负实数, 请写出每次“操作”后所得的数表 (写出一种方法即可);

表 2.1:

1	2	3	-7
-2	1	0	1

(2) 数表 A 如表 2 所示, 若必须经过两次“操作”, 才可使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负整数, 求整数 a 的所有可能取值:

表 2.2:

a	$a^2 - 1$	$-a$	$-a^2$
$2 - a$	$1 - a^2$	$a - 2$	a^2

(3) 对由 $m \times n$ 个实数组成的 m 行 n 列的任意一个数表 A , 能否经过有限次“操作”以后, 使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负实数? 请说明理由.

解 (1) 方法一: 先改变第 4 列, 再改变第 2 行.

方法二: 先改变第 2 行, 再改变第 4 列.

方法三: 先改变第 1 列, 再改变第 4 列.

(2) $a = 0, -1$.

(3) 因为每一次“操作”都会使得数表中所有数之和严格增加, 而所有可能的数表只有有限多种, 所以能经过有限次“操作”以后, 使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负实数.

2.2.3 调整方向问题

例题 2.2.5

(2012 年北京) 设 A 是由 $m \times n$ 个实数组成的 m 行 n 列的数表, 满足: 每个数的绝对值不大于 1, 且所有数的和为零. 记 $S(m, n)$ 为所有这样的数表构成的集合. 对于 $A \in S(m, n)$, 记 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行各数之和 ($1 \leq i \leq m$), $c_j(A)$ 为 A 的第 j 列各数之和 ($1 \leq j \leq n$); 记 $k(A)$ 为

$$|r_1(A)|, |r_2(A)|, \dots, |r_m(A)|, |c_1(A)|, |c_2(A)|, \dots, |c_n(A)|$$

中的最小值.

(1) 对如下数表 A , 求 $k(A)$ 的值;

1	1	-0.8
0.1	-0.3	-1

(2) 设数表 $A \in S(2, 3)$ 形如

1	1	c
a	b	-1

求 $k(A)$ 的最大值;

(3) 给定正整数 t , 对于所有的 $A \in S(2, 2t+1)$, 求 $k(A)$ 的最大值.

解 (1) $k(A) = 0.7$.

(2) 由已知, $a+b+c=-1$, 于是 $c=-1-a-b$, 同时 $-1 \leq c \leq 1$, 于是 $-2 \leq a+b \leq 0$. 因此

$$\begin{aligned} k(A) &= \min \{|a+1|, |b+1|, |c-1|, |2+c|, |a+b-1|\} \\ &= \min \{a+1, b+1, a+b+2, 1-a-b\} \\ &= \min \{a+1, b+1, 1-a-b\} \\ &\leq \frac{(a+1) + (b+1) + (1-a-b)}{3} \\ &= 1, \end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=0$ 时等号成立. 所以 $k(A)$ 的最大值为 1.

(3)

方法一 对于给定的正整数 t , 任给数表 $A \in S(2, 2t+1)$ 如下:

a_1	a_2	$\cdots$	a_{2t+1}
b_1	b_2	$\cdots$	b_{2t+1}

任意改变 A 的行次序或列次序, 或把 A 中的每个数换成它的相反数, 所得数表 $A^* \in S(2, 2t+1)$, 并且 $k(A) = k(A^*)$. 因此, 不妨设 $r_1(A) \geq 0$, 且 $c_j(A) \geq 0 (j=1, 2, \cdots, t+1)$.

由 $k(A)$ 的定义知, $k(A) \leq r_1(A), k(A) \leq c_j(A) (j=1, 2, \cdots, t+1)$. 又因为

$$c_1(A) + c_2(A) + \cdots + c_{2t+1}(A) = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} (t+2)k(A) &\leq r_1(A) + c_1(A) + c_2(A) + \cdots + c_{t+1}(A) \\ &= r_1(A) - c_{t+2}(A) - \cdots - c_{2t+1}(A) \\ &= \sum_{j=1}^{t+1} a_j - \sum_{j=t+2}^{2t+1} b_j \\ &\leq (t+1) - (-1) \cdot t \\ &= 2t+1, \end{aligned}$$

所以 $k(A) \leq \frac{2t+1}{t+2}$.

对数表 A_0 :

第 1 列	第 2 列	$\cdots$	第 $t+1$ 列	第 $t+2$ 列	$\cdots$	第 $2t+1$ 列
1	1	$\cdots$	1	$-1 + \frac{t-1}{t(t+2)}$	$\cdots$	$-1 + \frac{t-1}{t(t+2)}$
$\frac{t-1}{t+2}$	$\frac{t-1}{t+2}$	$\cdots$	$\frac{t-1}{t+2}$	-1	$\cdots$	-1

则 $A_0 \in S(2, 2t+1)$, 且 $k(A_0) = \frac{2t+1}{t+2}$.

综上, 对于所有的 $A \in S(2, 2t+1)$, $k(A)$ 的最大值为 $\frac{2t+1}{t+2}$.

方法二 对数表 A_1 :

第 1 列	第 2 列	...	第 $t+1$ 列	第 $t+2$ 列	第 $t+3$ 列	...	第 $2t+1$ 列
1	1	...	1	-1	0	...	0
0	0	...	0	-1	-1	...	-1

则 $A_1 \in S(2, 2t+1)$, 且 $k(A_1) = 1$, 故 $k(A)$ 的最大值不小于 1.

对于给定的正整数 t , 任给数表 $A \in S(2, 2t+1)$ 如下:

a_1	a_2	...	a_{2t+1}
b_1	b_2	...	b_{2t+1}

任意改变 A 的行次序或列次序, 或把 A 中的每个数换成它的相反数, 所得数表 $A^* \in S(2, 2t+1)$, 并且 $k(A) = k(A^*)$. 因此, 不妨设 $r_1(A) \geq 0$, $c_i(A) \geq 0 (i = 1, 2, \dots, p)$, $c_j(A) < 0 (j = p+1, p+2, \dots, 2t+1)$, 且 $p \geq t+1$.

(i) 将 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 调整至 1, $b_1, b_2, \dots, b_p$ 调整至 $a_1 + b_1 - 1, a_2 + b_2 - 1, \dots, a_p + b_p - 1$, 则此时由 $0 \leq a_i + b_i \leq 2 (i = 1, 2, \dots, p)$, 得 $-1 \leq a_i + b_i - 1 \leq 1$, 于是此数表仍为 $S(2, 2t+1)$ 型数表, 且此时 $k(A)$ 不减.

(ii) 将 $b_{p+1}, b_{p+2}, \dots, b_{2t+1}$ 调整至 -1, $a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{2t+1}$ 调整至 $a_{p+1} + b_{p+1} + 1, a_{p+2} + b_{p+2} + 1, \dots, a_{2t+1} + b_{2t+1} + 1$, 则此时由 $-2 \leq a_j + b_j < 0 (j = p+1, p+2, \dots, 2t+1)$, 得 $-1 \leq a_j + b_j + 1 < 1$, 于是此数表仍为 $S(2, 2t+1)$ 型数表, 且此时 $k(A)$ 不减.

(iii) 经过 (i)(ii) 的调整, 此时数表如下:

第 1 列	第 2 列	...	第 p 列	第 $p+1$ 列	第 $p+2$ 列	...	第 $2t+1$ 列
1	1	...	1	a_{p+1}	a_{p+2}	...	a_{2t+1}
b_1	b_2	...	b_p	-1	-1	...	-1

若 $b_1, b_2, \dots, b_p$ 中有负数或 $a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{2t+1}$ 中有正数, 则 $k(A) < 1$. 故只需考虑 $b_1, b_2, \dots, b_p \geq 0$ 且 $a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{2t+1} \leq 0$ 的情形即可.

易知当 $k(A)$ 取得最大值时, $b_1 = b_2 = \dots = b_p, a_{p+1} = a_{p+2} = \dots = a_{2t+1}$. 此时数表如下:

第 1 列	第 2 列	...	第 p 列	第 $p+1$ 列	第 $p+2$ 列	...	第 $2t+1$ 列
1	1	...	1	y	y	...	y
x	x	...	x	-1	-1	...	-1

其中 $x \geq 0, y \leq 0$.

令 $q = 2t+1-p$, 则 $p+q = 2t+1, p(1+x) + q(y-1) = 0$. 因此

$$k(A) = \min\{1+x, 1-y, p+qy\} = \min\{1+x, p+qy\} \leq \frac{p(1+x) + (p+qy)}{p+1} = \frac{2t+1}{p+1} \leq \frac{2t+1}{t+2}.$$

对数表 A_0 :

第 1 列	第 2 列	...	第 $t+1$ 列	第 $t+2$ 列	...	第 $2t+1$ 列
1	1	...	1	$-1 + \frac{t-1}{t(t+2)}$	...	$-1 + \frac{t-1}{t(t+2)}$
$\frac{t-1}{t+2}$	$\frac{t-1}{t+2}$	...	$\frac{t-1}{t+2}$	-1	...	-1

则 $A_0 \in S(2, 2t+1)$, 且 $k(A_0) = \frac{2t+1}{t+2}$.

综上, 对于所有的 $A \in S(2, 2t+1)$, $k(A)$ 的最大值为 $\frac{2t+1}{t+2}$.

2.2.4 课后习题

习题 2.2.1 (2016 年西城高三第一学期期末) 在数字 $1, 2, \dots, n (n \geq 2)$ 的任意一个排列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 中, 如果对于 $i, j \in \mathbb{N}^*, i < j$, 有 $a_i > a_j$, 那么就称 (a_i, a_j) 为一个逆序对. 记排列 A 中逆序对的个数为 $S(A)$.

如 $n=4$ 时, 在排列 $B: 3, 2, 4, 1$ 中, 逆序对有 $(3, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 1)$, 则 $S(B) = 4$.

(1) 设排列 $C: 3, 5, 6, 4, 1, 2$, 写出 $S(C)$ 的值;

(2) 对于数字 $1, 2, \dots, n$ 的一切排列 A , 求所有 $S(A)$ 的算术平均值;

(3) 如果把排列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 中两个数字 $a_i, a_j (i < j)$ 交换位置, 而其余数字的位置保持不变, 那么就得到一个新的排列 $A': b_1, b_2, \dots, b_n$, 求证: $S(A) + S(A')$ 为奇数.

解 (1) 10.

(2) $\frac{n(n-1)}{4}$.

(3) 情形 1, 若 $a_i, a_j (i < j)$ 相邻, 则易知 $S(A)$ 与 $S(A')$ 的奇偶性相反.

情形 2, 若 $a_i, a_j (i < j)$ 不相邻, 假设 $a_i, a_j (i < j)$ 之间有 s 个数, 则 $a_i, a_j (i < j)$ 的对换可以通过 $2s+1$ 次相邻位置的对换来实现. $2s+1$ 是奇数, 而相邻位置的对换改变逆序对个数的奇偶性, 所以 $S(A)$ 与 $S(A')$ 的奇偶性相反.

综上所述, 可知 $S(A) + S(A')$ 为奇数.

注 逆序对的概念在置换群的讨论、行列式的计算中均有重要应用.

习题 2.2.2 (2013 年西城高三期末) 已知一个 $n \times n$ 的数表 A 中的所有数

$$a_{ij} \in \{-1, 1\}, \text{ 其中 } i, j \leq n, i, j \in \mathbb{N}^*.$$

记 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行中各数之积, $c_j(A)$ 为 A 中第 j 列各数之积. 令

$$l(A) = \sum_{i=1}^n r_i(A) + \sum_{j=1}^n c_j(A).$$

(1) 请写出一个 4×4 的数表 A , 使得 $l(A) = 0$;

(2) 是否存在 9×9 的数表 A , 使得 $l(A) = 0$? 说明理由;

(3) 给定正整数 n , 对于所有的 $n \times n$ 的数表 A , 求 $l(A)$ 的取值集合.

解 (1) 第一行取 -1 , 其余各数均为 1 即可;

(2) 不存在;

(3) 从全 1 的数表调整, 每次将其中的 1 逐一调整为 -1 , 可得 $l(A)$ 的取值集合为

$$\{2n - 4k | 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

习题 2.2.3 (2011 年西城一模) 定义 $\tau(a_1, a_2, \dots, a_n) = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|$ 为有限项数列 $\{a_n\}$ 的波动强度.

(1) 当 $a_n = (-1)^n$ 时, 求 $\tau(a_1, a_2, \dots, a_{100})$;

(2) 若数列 a, b, c, d 满足 $(a-b)(b-c) > 0$, 求证: $\tau(a, b, c, d) \leq \tau(a, c, d, b)$;

(3) 设 $\{a_n\}$ 的各项均不相等, 且交换数列 $\{a_n\}$ 中的任何相邻两项的位置, 都会使得数列的波动强度增加, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 一定是递增数列或递减数列.

解 (1) 198;

(2) 用分析法, 利用绝对值不等式容易证明;

(3) 用反证法, 利用 (2) 的结论容易证明.

第三章 进阶篇

3.1 递推与递归

3.1.1 由简单递推到复杂

例题 3.1.1

(2016 年朝阳二模) 已知集合 $S = \left\{ k \mid 1 \leq k \leq \frac{3^n - 1}{2}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$ ($n \geq 2$, 且 $n \in \mathbb{N}^*$). 若存在非空集合 $S_1, S_2, \dots, S_n$, 使得 $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, 且 $S_i \cap S_j = \emptyset$ ($1 \leq i < j \leq n$), 并 $\forall x, y \in S_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 都有 $x - y \notin S_i$, 则称集合 S 具有性质 P , S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 称为集合 S 的 P 子集.

(1) 当 $n = 2$ 时, 试说明集合 S 具有性质 P , 并写出相应的 P 子集 S_1, S_2 ;

(2) 若集合 S 具有性质 P , 集合 T 是集合 S 的一个 P 子集, 设 $T' = \{s + 3^n \mid s \in T\}$, 求证: $\forall x, y \in T \cup T'$, $x > y$, 都有 $x - y \notin T \cup T'$;

(3) 求证: 对任意正整数 $n \geq 2$, 集合 S 具有性质 P .

解 (1) $S_1 = \{1, 4\}, S_2 = \{2, 3\}$;

(2) 略;

(3) 设 $S(n)$ 的 P 子集为 $S_1, S_2, \dots, S_n$, 则由第 (2) 小题的结论, 有 $S(n+1)$ 的 P 子集为

$$S_1 \cup S'_1, S_2 \cup S'_2, \dots, S_n \cup S'_n, \left\{ \frac{3^n + 1}{2}, \frac{3^n + 3}{2}, \dots, \frac{3^n + 3^n}{2} \right\}.$$

例题 3.1.2

将 $1, 2, \dots, n$ 排成一列, 要求: 除左边的第一个数外, 每个数都与它左边 (未必相邻) 的某个数相差 1, 将此种排列称为“ n 排列”. 比如当 $n = 2$ 时, 有 $(1, 2), (2, 1)$ 共 2 种“2 排列”; 当 $n = 3$ 时, 有 $(1, 2, 3), (2, 1, 3), (2, 3, 1),$

$(3, 2, 1)$ 共 4 种“3 排列”.

(1) 请写出所有的“4 排列”;

(2) 请写出“ n 排列”结尾数字的所有可能情形, 并加以证明;

(3) 证明: “ n 排列”共有 2^{n-1} 个.

解 (1) 共 8 种“4 排列”: $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 1, 3, 4)$, $(2, 3, 1, 4)$, $(3, 2, 1, 4)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 2, 4, 1)$, $(3, 4, 2, 1)$, $(4, 3, 2, 1)$.

(2) “ n 排列”的结尾数字只能是 1 或 n .

首先证明以下引理:

引理 任何“ $n+1$ 排列”中去掉数字 $n+1$ 后的 n 个数一定组成“ n 排列”.

事实上, 若“ $n+1$ 排列”中 $n+1$ 排在 n 的右边, 那么去掉这个数对其他所有数都没有影响, 因此组成“ n 排列”; 若“ $n+1$ 排列”中 $n+1$ 排在 n 的左边, 那么 $n+1$ 只可能排在左边第一位, 此时去掉这个数对其他所有数都没有影响, 因此组成“ n 排列”.

根据引理, 任何一个“ $n+1$ 排列”都必然由某个“ n 排列”通过在适当的位置添加 $n+1$ 得到.

接下来用数学归纳法证明原命题.

归纳基础显然成立.

假设任何“ n 排列”的结尾是 1 或 n , 那么对于“ $n+1$ ”排列, 只有两种可能:

方式一 当“ n 排列”以 n 结尾时, 直接在结尾添加 $n+1$, 此时符合题意;

方式二 当“ n 排列”以 1 结尾时, 或者直接在结尾添加 $n+1$, 或者将 $n+1$ 添加在非结尾的位置 (此时“ $n+1$ 排列”以 1 结尾), 均符合题意.

综上所述, “ n 排列”的结尾数字只能是 1 或 n .

(3) 用数学归纳法证明.

归纳基础显然成立.

假设“ n 排列”共有 2^{n-1} 个, 那么考虑“ $n+1$ 排列”可以通过两种方式得到:

方式一 直接在“ n 排列”的结尾添加 $n+1$, 因此以 $n+1$ 结尾的“ $n+1$ 排列”有 2^{n-1} 个;

方式二 “ n 排列”的每个数都增加 1, 然后在结尾添加 1, 因此以 1 结尾的“ $n+1$ 排列”有 2^{n-1} 个.

综上所述, “ n 排列”共有 2^{n-1} 个.

3.1.2 将复杂递推推到简单

例题 3.1.3

(2012 年东城一模理) 若对于正整数 k , $g(k)$ 表示 k 的最大奇数因数, 例如 $g(3) = 3$, $g(10) = 5$.

设 $S_n = g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + \cdots + g(2^n)$.

(1) 求 $g(6)$, $g(20)$ 的值;

(2) 求 S_1, S_2, S_3 的值;

(3) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式.

解 (1) $g(6) = 3$, $g(20) = 5$.

(2) $S_1 = g(1) + g(2) = 2$;

$S_2 = g(1) + g(2) + g(3) + g(4) = 1 + 1 + 3 + 1 = 6$;

$$S_3 = g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + \cdots + g(8) = 1 + 1 + 3 + 1 + 5 + 3 + 7 + 1 = 22.$$

(3) 考虑到 $g(2k) = g(k)$, 于是

$$\begin{aligned} S_n &= g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + \cdots + g(2^n) \\ &= [g(1) + g(3) + g(5) + \cdots + g(2^n - 1)] + [g(2) + g(4) + \cdots + g(2^n)] \\ &= (1 + 3 + \cdots + 2^n - 1) + S_{n-1}. \end{aligned}$$

于是

$$S_n - S_{n-1} = 2^{2n-2}.$$

而 $S_1 = 2$, 所以

$$S_n = \frac{2^{2n} + 2}{3} = \frac{1}{3}(4^n + 2), n \in \mathcal{N}^*.$$

例题 3.1.4

(2016 年西城一模) 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的项数均为 m , 则将数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的距离定义为 $\sum_{i=1}^m |a_i - b_i|$.

(1) 给出数列 1, 3, 5, 6 和数列 2, 3, 10, 7 的距离;

(2) 设 A 为满足递推关系 $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ 的所有数列 $\{a_n\}$ 的集合, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 为 A 中的两个元素, 且项数均为 m , 若 $b_1 = 2, c_1 = 3$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 的距离小于 2016, 求 m 的最大值;

(3) 记 S 是所有 7 项数列 $\{a_n \mid 1 \leq n \leq 7, a_n = 0, 1\}$ 的集合, $T \subseteq S$, 且 T 中任何两个元素的距离大于或等于 3, 证明: T 中的元素个数小于或等于 16.

解 (1) 7. (2) 3455.

(3) 假设 T 中的元素个数大于或等于 17. 因为仅由数列 $\{a_n\}$ 的前三项构成的数组 (a_1, a_2, a_3) 有且只有 8 个, 故这 17 个元素 (即数列) 之中必有 3 的前 3 项相同, 这 3 个元素的后四项分别为

$$(a_4, a_5, a_6, a_7), (b_4, b_5, b_6, b_7), (c_4, c_5, c_6, c_7),$$

则在 (a_4, a_5, a_6, a_7) 和 (b_4, b_5, b_6, b_7) 的距离不小 3 的情况下, (c_4, c_5, c_6, c_7) 与 $(a_4, a_5, a_6, a_7), (b_4, b_5, b_6, b_7)$ 的距离之和必然不超过 5, 矛盾. 所以 T 中的元素个数小于或等于 16.

注 T 中的元素个数等于 16 的构造如下:

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0), \\ &(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1), \\ &(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1), \\ &(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

3.1.3 课后习题

习题 3.1.1 (2016 年 3 月北京市部分学校高三联考) 定义 $\overline{abc}$ 是一个三位数, 其中各数位上的数字

$$a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

且不全相同. 定义如下运算 f : 把 $\overline{abc}$ 的三个数字 a, b, c 自左到右分别由大到小排列和由小到大排列 (若非零数字不足三位则在前面补 0), 然后用“较大数”减去“较小数”. 例如: $f(100) = 100 - 001 = 099$, $f(102) = 210 - 012 = 198$. 如下定义一个三位数序列: 第一次实施运算 f 的结果记为 $\overline{a_1b_1c_1}$, 对于 $n > 1$ 且 $n \in \mathbb{N}$, $\overline{a_nb_nc_n} = f(\overline{a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}})$. 将 $\overline{a_nb_nc_n}$ 的三个数字中的最大数字与最小数字的差记为 d_n .

- (1) 当 $\overline{abc} = 636$ 时, 求 $\overline{a_1b_1c_1}$, $\overline{a_2b_2c_2}$ 及 d_2 的值;
- (2) 若 $d_1 = 6$, 求证: 当 $n > 1$ 时, $d_n = 5$;
- (3) 求证: 对任意三位数 $\overline{abc}$, $n \geq 6$ 时, $\overline{a_nb_nc_n} = 495$.

解 (1) $\overline{a_1b_1c_1} = 297$, $\overline{a_2b_2c_2} = 693$, $d_2 = 6$.

(2) 易知, $f(\overline{a_nb_nc_n}) = 99d_n$.

下面我们用数学归纳法来证明“当 $n > 1$ 时, $d_n = 5$ ”.

(i) $n = 2$ 时, 因为 $d_1 = 6$, 所以

$$\overline{a_2b_2c_2} = f(\overline{a_1b_1c_1}) = 594,$$

故 $d_2 = 5$.

所以 $n = 2$ 时, 要证的命题成立.

(ii) 假设 $n = k > 1$ 时要证的命题成立, 即 $d_k = 5$. 则 $n = k + 1$ 时,

$$\overline{a_{k+1}b_{k+1}c_{k+1}} = f(\overline{a_kb_kc_k}) = 99d_k = 495,$$

所以 $d_{k+1} = 5$.

故 $n = k + 1$ 时, 要证的命题也成立.

综合 (i)(ii) 可知, 命题“当 $n > 1$ 时, $d_n = 5$ ”成立.

(3) 易知, $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

因为

$$\overline{a_1b_1c_1} = f(\overline{abc}) = 99d = \overline{d00} - \overline{00d},$$

所以 $a_1 = d - 1, b_1 = 9, c_1 = 10 - d$, 故

$$d_1 = \begin{cases} 10 - d, & d \leq 5, \\ d - 1, & d > 5, \end{cases}$$

因此 $d_1 \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

若 $d_1 = 5$, 则 $\overline{a_2b_2c_2} = \overline{a_3b_3c_3} = \cdots = 495$;

若 $d_1 = 6$, 则 $d_2 = 5$, 故 $\overline{a_3b_3c_3} = \overline{a_4b_4c_4} = \cdots = 495$;

若 $d_1 = 7$, 则 $d_2 = 6, d_3 = 5$, 故 $\overline{a_4 b_4 c_4} = \overline{a_5 b_5 c_5} = \cdots = 495$;

若 $d_1 = 8$, 则 $d_2 = 7, d_3 = 6, d_4 = 5$, 故 $\overline{a_5 b_5 c_5} = \overline{a_6 b_6 c_6} = \cdots = 495$;

若 $d_1 = 9$, 则 $d_2 = 8, d_3 = 7, d_4 = 6, d_5 = 5$, 故 $\overline{a_6 b_6 c_6} = \overline{a_7 b_7 c_7} = \cdots = 495$.

综上所述, 对任意三位数 $\overline{abc}$, 当 $n \geq 6$ 时, 均有 $\overline{a_n b_n c_n} = 495$.

注 这个问题叫做“Kaprekar 问题”, 由印度数学家 Kaprekar 在 1949 年提出. 我们还可以证明, 对于各个数位上的数字不全相同的四位数来说, 最多进行 7 次题中所描述的操作, 即可得到常数 6174.

习题 3.1.2 (2013 年朝阳高三期末考试) 将正整数 $1, 2, 3, 4, \cdots, n^2 (n \geq 2)$ 任意排成 n 行 n 列的数表. 对于某一个数表, 计算各行和各列中的任意两个数 $a, b (a > b)$ 的比值 $\frac{a}{b}$, 称这些比值中的最小值为这个数表的“特征值”.

(1) 当 $n = 2$ 时, 试写出排成的各个数表中所有可能的不同“特征值”.

(2) 若 a_{ij} 表示某个 n 行 n 列数表中第 i 行第 j 列的数 ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$), 且满足 $a_{ij} = \begin{cases} i + (j - i - 1)n, & i < j, \\ i + (n - i + j - 1)n, & i \geq j \end{cases}$. 请分别写出 $n = 3, 4, 5$ 时数表的“特征值”, 并由此归纳此类数表的特征值 (不必证明);

(3) 对于由正整数 $1, 2, 3, 4, \cdots, n^2$ 排成的 n 行 n 列的任意数表, 记其“特征值”为 λ , 求证 $\lambda \leq \frac{n+1}{n}$.

解 (1) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$.

(2)

7	1	4
5	8	2
3	6	9

$\frac{4}{3}$.

13	1	5	9
10	14	2	6
7	11	15	3
4	8	12	16

$\frac{5}{4}$.

21	1	6	11	16
17	22	2	7	12
13	18	23	3	8
9	14	19	24	4
5	10	15	20	25

$\frac{6}{5}$.

归纳猜想 $\frac{n+1}{n}$.

(3) 考虑 n 个较大的数 $n^2 - n + 1, n^2 - n + 2, \dots, n^2$.

第一种情况, 若这 n 个数既不同行也不同列, 考虑 $n^2 - n$ 这个数, 必然存在两个数与之同行或同列, 于是

$$\lambda \leq \frac{n^2 - 1}{n^2 - n} = \frac{n + 1}{n};$$

第二种情况, 若这 n 个数有两数同行或同列, 考虑这两个同行或同列的数, 于是

$$\lambda \leq \frac{n^2}{n^2 - n + 1} \leq \frac{n^2 - 1}{n^2 - n} = \frac{n + 1}{n}.$$

由此命题得证.

3.2 集合与对应

3.2.1 一一映射

例题 3.2.1

已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 3$) 具有性质 P : 对任意的 i, j ($1 \leq i \leq j \leq n$), $a_i + a_j$ 与 $a_i - a_j$ 两数中至少有一个属于 A .

(1) 分别判断数集 $\{0, 1, 3\}$ 与 $\{0, 2, 4, 6\}$ 是否具有性质 P , 说明理由;

(2) 求证: $a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2}a_n$;

(3) 已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 3$) 具有性质 P , 请探究 n 为何值时, $a_1, a_2, \dots, a_n$ 一定组成等差数列.

解 (1) $\{0, 1, 3\}$ 不具有性质 P ; $\{0, 2, 4, 6\}$ 具有性质 P ;

(2) 根据题意,

$$a_n + a_n > a_n + a_{n-1} > a_n + a_{n-2} > \dots > a_n + a_1 = a_n,$$

所以

$$a_n - a_n < a_n - a_{n-1} < a_n - a_{n-2} < \dots < a_n - a_1,$$

且这些数均在 A 中. 因此

$$a_n - a_n = a_1, a_n - a_{n-1} = a_2, a_n - a_{n-2} = a_3, \dots, a_n - a_1 = a_n \dots,$$

即

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_n + a_1 = a_n,$$

从而原命题得证.

(3) $n = 3$ 时, $a_1 = 0$, $a_3 = 2a_2$, a_1, a_2, a_3 组成等差数列;

当 $n = 4$ 时, $a_1 = 0$, $a_2 + a_3 = a_4$ 即可, 如 $\{0, 2, 3, 5\}$, 不一定组成等差数列;

当 $n \geq 5$ 时, $a_1 = 0$, 与 2 类似,

$$a_{n-1} + a_{n-1} > a_{n-1} + a_{n-2} > a_{n-1} + a_{n-3} > \dots > a_{n-1} + a_3 > a_{n-1} + a_2 = a_n,$$

于是

$$a_{n-1} - a_{n-1} < a_{n-1} - a_{n-2} < a_{n-1} - a_{n-3} < \dots < a_{n-1} - a_3 < a_{n-1} - a_2 < a_{n-1} - a_1 < a_n,$$

且这些数均在 A 中.

因此 $a_{n-1} - a_{n-1} = a_1$, $a_{n-1} - a_{n-2} = a_2$, $a_{n-1} - a_{n-3} = a_3$, $\dots$, $a_{n-1} - a_1 = a_{n-1}$, $a_n = a_n \dots$ ②

综上所述, 有

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = a_n - a_{n-2} = a_{n-1} - a_{n-3} = \cdots = a_n - a_2 = a_{n-1} - a_1.$$

即

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-3} = \cdots = a_2 - a_1.$$

因此 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为等差数列.

例题 3.2.2

(2015 年 5 月北京市部分学校高三联考) 对给定的正整数 n , 若存在若干个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n (k = 1, 2, \cdots)$, 且 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, 则称数列 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为正整数 n 的一个“友数列”. 若 n 的所有友数列的个数记为 M_n , 对任意一个友数列 $\sigma_i^n (i = 1, 2, \cdots, M_n)$, $A(\sigma_i^n)$ 表示数列中数字 1 出现的个数, $B(\sigma_i^n)$ 表示数列中出现的不同数字的个数, 则研究下列问题:

- (1) 当 $n = 4$ 时, 分别写出 $M_4, \sum_{i=1}^{M_4} A(\sigma_i^4), \sum_{i=1}^{M_4} B(\sigma_i^4)$;
- (2) 计算 $\sum_{i=1}^{M_5} A(\sigma_i^5)$, 并比较其与 $M_4 + M_3 + M_2 + M_1 + 1$ 的大小;
- (3) 对给定的正整数 n , 试比较 $\sum_{i=1}^{M_n} A(\sigma_i^n)$ 与 $\sum_{i=1}^{M_n} B(\sigma_i^n)$ 的大小, 并说明理由.

解 (1) $M_4 = 5, \sum_{i=1}^{M_4} A(\sigma_i^4) = 7, \sum_{i=1}^{M_4} B(\sigma_i^4) = 7$.

(2) 因为 $\sum_{i=1}^{M_5} A(\sigma_i^5) = 12, M_4 + M_3 + M_2 + M_1 + 1 = 5 + 3 + 2 + 1 + 1 = 12$, 所以 $\sum_{i=1}^{M_5} A(\sigma_i^5) = M_4 + M_3 + M_2 + M_1 + 1$.

(3) 对给定的正整数 n , 一方面, 在所有 M_n 个友数列中, 首项为 1 的有 M_{n-1} 个, 第二项为 1 的有 M_{n-2} 个, $\cdots$, 第 $n-1$ 项为 1 的有 $M_1 = 1$ 个, 第 n 项为 1 的有 1 个, 因此

$$\sum_{i=1}^{M_n} A(\sigma_i^n) = M_{n-1} + M_{n-2} + \cdots + M_2 + M_1 + 1.$$

另一方面, 在所有 M_n 个友数列中, 从含有 1 的一个友数列里去掉一个 1, 则成为 $n-1$ 的一个友数列, 共有 M_{n-1} 个; 从含有 2 的一个友数列里去掉一个 2, 则成为 $n-2$ 的一个友数列, 共有 M_{n-2} 个; $\cdots$; 从含有 $n-1$ 的一个友数列里去掉一个 $n-1$, 则成为 1 的一个友数列, 共有 M_1 个; 最后加上含有 n 的 1 个友数列. 因此

$$\sum_{i=1}^{M_n} B(\sigma_i^n) = M_{n-1} + M_{n-2} + \cdots + M_2 + M_1 + 1.$$

综上所述, $\sum_{i=1}^{M_n} A(\sigma_i^n) = \sum_{i=1}^{M_n} B(\sigma_i^n)$.

3.2.2 单射与满射

例题 3.2.3

(2012 年海淀二模) 将一个正整数 n 表示为 $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ ($p \in \mathcal{N}^*$) 的形式, 其中 $a_i \in \mathcal{N}^*$, $i = 1, 2, \cdots, p$, 且 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_p$, 记所有这样的表示法的种数为 $f(n)$ (如 $4 = 4$, $4 = 1 + 3$, $4 = 2 + 2$, $4 = 1 + 1 + 2$, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, 故 $f(4) = 5$).

(1) 写出 $f(3)$, $f(5)$ 的值, 并说明理由;

(2) 对任意正整数 n , 比较 $f(n+1)$ 与 $\frac{1}{2}[f(n) + f(n+2)]$ 的大小, 并给出证明;

(3) 当正整数 $n \geq 6$ 时, 求证: $f(n) \geq 4n - 13$.

解 (1) 因为 $3 = 3$, $3 = 1 + 2$, $3 = 1 + 1 + 1$, 所以

$$f(3) = 3.$$

因为 $5 = 5$, $5 = 2 + 3$, $5 = 1 + 4$, $5 = 1 + 1 + 3$, $5 = 1 + 2 + 2$, $5 = 1 + 1 + 1 + 2$, $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, 所以

$$f(5) = 7.$$

(2) 因为 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$, $f(6) = 11$, $f(7) = 15, \cdots$. $f(n+1) \leq \frac{1}{2}[f(n) + f(n+2)]$, 只需要证明

$$f(n+2) - f(n+1) \geq f(n+1) - f(n).$$

证明如下:

注意到在 n 的所有表示法前加上“1+”就可以得到 $(n+1)$ 的表示法中以 1 为第一项的表示法, 因此 $(n+1)$ 的表示法中以 1 为第一项的有 $f(n)$ 种, 因此不以 1 为第一项的有 $f(n+1) - f(n)$ 种;

类似的, $n+2$ 的表示法中所有不以 1 为第一项的表示法中的最后一项加上 1 就可以得到 $n+2$ 的表示法中不以 1 为第一项的表示法, 且这些表示法均不相同. 所以

$$f(n+2) - f(n+1) \geq f(n+1) - f(n).$$

综上, 命题得证.

(3) 法一

根据 (2), $f(n+2) - f(n+1) \geq f(n+1) - f(n)$. 而 $f(6) = 11$, $f(7) = 15$, 所以 $f(7) - f(6) = 4$, $f(8) - f(7) \geq 4$, $f(9) - f(8) \geq 4, \cdots$, $f(n) - f(n-1) \geq 4$, 其中 $k \in \mathcal{N}^*$, 累加就有

$$f(n) - f(6) \geq 4(n-6),$$

即

$$f(n) \geq 4n - 13.$$

法二

由于当 $n=6$ 时, $f(6)=11$, 命题成立; 由此只需证明 $n \geq 6$ 时, $f(n+1)-f(n) \geq 4$ 即可. 在 $(n+1)$ 的表示法中, 以 1 为第一项的有 $f(n)$ 个; 考虑 $(n+1)$ 的表示法中不以 1 为第一项的, 至少有三类:

第一类, 1 个数的, $(n+1)=(n+1)$, 共 1 个;

第二类, 2 个数的, $(n+1)=2+(n-1)$, $(n+1)=3+(n-2)$, $\cdots$, $(n+1)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+(n+1)-\left[\frac{n+1}{2}\right]$, 至少有 2 个;

第三类, 3 个数的, $(n+1)=\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]+\underbrace{(n+1)-2\left[\frac{n+1}{3}\right]}_{\geq 4}$, $\cdots$, 至多有 1 个.

从而 $f(n+1)-f(n) \geq 4$.

3.2.3 课后习题

习题 3.2.1 (2007 年北京) 已知集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} (k \geq 2)$, 其中 $a_i \in \mathbb{Z} (i=1, 2, \cdots, k)$. 由 A 中的元素构成两个相应的集合: $S = \{(a, b) | a \in A, b \in A, a+b \in A\}$, $T = \{(a, b) | a \in A, b \in A, a-b \in A\}$. 其中 (a, b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n . 若对于任意的 $a \in A$, 总有 $-a \notin A$, 则称集合 A 具有性质 P .

(1) 检验集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 与集合 $\{-1, 2, 3\}$ 是否具有性质 P , 并对其中具有性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T ;

(2) 对任何具有性质 P 的集合 A , 证明: $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$;

(3) 判断 m 和 n 的大小关系, 并证明你的结论.

解 (1) 集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 不具有性质 P .

集合 $\{-1, 2, 3\}$ 具有性质 P , 其相应的集合 S 和 T 分别是 $S = \{(-1, 3), (3, -1)\}$, $T = \{(2, -1), (2, 3)\}$.

(2) 注意 $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$.

(3) $m = n$.

3.3 构造与论证

3.3.1 利用提示构造

例题 3.3.1

(2014 年海淀一模) 在平面直角坐标系中, 对于任意相邻三点都不共线的有序整点列 (整点即横纵坐标都是整数的点), $A(n): A_1, A_2, \dots, A_n$ 与 $B(n): B_1, B_2, \dots, B_n$, 其中 $n \geq 3$, 若同时满足:

① $A_1 = B_1, A_n = B_n$;

② 线段 $A_i A_{i+1} \perp B_i B_{i+1}$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n-1$,

则称 $A(n)$ 与 $B(n)$ 互为正交点列.

(1) 求 $A(3): A_1(0, 2), A_2(3, 0), A_3(5, 2)$ 的正交点列;

(2) 判断 $A(4): A_1(0, 0), A_2(3, 1), A_3(6, 0), A_4(9, 1)$ 是否存在正交点列 $B(4)$, 并说明理由;

(3) 判断对于任意 $n \geq 5, n \in \mathbb{N}$, 是否都存在无正交点列的有序整点列 $A(n)$, 并证明你的结论.

解 $B(3): B_1(0, 2), B_2(2, 5), B_3(5, 2)$.

(2) 记

$$A'(n): \overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_2 A_3}, \dots, \overrightarrow{A_{n-1} A_n},$$

则

$$A'(4): (3, 1), (3, -1), (3, 1),$$

于是

$$B'(4): \lambda_1(1, -3), \lambda_2(1, 3), \lambda_3(1, -3).$$

式中 $\lambda_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3$. 因此

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9, \\ -3\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 1. \end{cases}$$

矛盾.

因此 $A(4): A_1(0, 0), A_2(3, 1), A_3(6, 0), A_4(9, 1)$ 不存在正交点列 $B(4)$.

(3) 结论是肯定的, 构造如下: 当 n 为偶数时, 取

$$A_1(0, 0), A'(n): (3, 1), (3, -1), (3, 1), (3, -1), \dots, (3, 1).$$

当 n 为奇数时, 取

$$A_1(0, 0), A'(n): (3, 1), (3, -1), (3, 1), (3, -1), \dots, (3, 1), (3, -2).$$

证明与 (2) 类似.

例题 3.3.2

(2014 年江苏) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若对任意正整数 n , 总存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 是“ H 数列”.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 证明: $\{a_n\}$ 是“ H 数列”;

(2) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其首项 $a_1 = 1$, 公差 $d < 0$. 若 $\{a_n\}$ 是“ H 数列”, 求 d 的值;

(3) 证明: 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个“ H 数列” $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n + c_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 成立.

分析 第 (1) 小题直接按照“ H 数列”的定义证明即可. 第 (2) 小题中对核心条件 $S_n = a_m$ 进行代数变形, 考虑边界条件就可以确定 d 的取值. 第 (3) 小题在第 (2) 小题的基础上, 对 $a_1 = -d$ 的情形进行扩充, 可得 $a_1 = kd$, 其中 $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ 时的等差数列均为“ H 数列”, 然后对等差数列 $\{a_n\}$ 的通项稍加变形即得.

解 (1) 若数列 $S_n = 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则

$$a_n = \begin{cases} 2, & n = 1, \\ 2^{n-1}, & n \geq 2, \end{cases}$$

因此对任意正整数 n , 均有

$$S_n = 2^n = a_{n+1},$$

因此数列 $\{a_n\}$ 是“ H 数列”.

(2) 根据题意, 对任意正整数 n , 存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 即

$$na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d = a_1 + (m-1)d,$$

也即

$$m = 1 + \frac{n-1}{d} + \frac{n(n-1)}{2},$$

取 $n = 2$, 则有

$$m = 2 + \frac{1}{d}, \text{ 即 } d = \frac{1}{m-2},$$

而 m 是正整数, $d < 0$, 因此 $d = -1$.

而当 $d = -1$ 时, 对任意正整数 n , 均存在正整数

$$m = 2 - n + \frac{n(n-1)}{2}$$

使得 $S_n = a_m$, 因此 $\{a_n\}$ 是“ H 数列”.

综上, d 的值为 -1 .

(3) 与第 (2) 小题类似, 可得对公差为 d 的等差数列 $\{x_n\}$ 而言, $S_n = a_m$ 成立等价于

$$m = 1 + \frac{(n-1)x_1}{d} + \frac{n(n-1)}{2},$$

因此当 $x_1 = 0$ 或 $x_1 = d$ 时, $\{x_n\}$ 均为“ H 数列”, 也即数列 $\{nd\}$ 和数列 $\{(n-1)d\}$ 均为“ H 数列”.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d_0 , 则

$$a_n = a_1 + (n-1)d_0 = n \cdot a_1 + (n-1) \cdot (d_0 - a_1),$$

而数列 $\{n \cdot a_1\}$ 和数列 $\{(n-1) \cdot (d_0 - a_1)\}$ 均为“ H 数列”, 因此原命题得证.

注 下面给出此题的一般结论.

首先证明一个引理: 公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 是“ H 数列”的充要条件是 $a_1 = kd$, k 为整数, 且 $k \geq -1$.

(i) 必要性.

设 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 考虑 $S_2 = a_m$, 有 $a_1 = (m-2)d$. 令 $k = m-2$, 则 $a_1 = kd$, k 为整数, 且 $k \geq -1$.

(ii) 充分性.

当 $a_1 = kd$, k 为整数, 且 $k \geq -1$ 时, $a_n = (n+k-1)d$, $S_n = \left[\frac{n(n-1)}{2} + kn \right] d$. 若 $S_n = a_m$, 则

$$\left[\frac{n(n-1)}{2} + kn \right] d = (m+k-1)d.$$

情形 1.

若 $d \neq 0$, 则 $m = \frac{n(n-1)}{2} + k(n-1) + 1 \in \mathbb{Z}$. 而

$$m = \frac{(n-1)(n+2k)}{2} + 1 \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 \geq 1,$$

所以对任意正整数 n , 总存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 从而 $\{a_n\}$ 是“ H 数列”.

情形 2.

若 $d = 0$, $\{a_n\}$ 显然是“ H 数列”.

引理证毕.

利用引理, 可以给出此题 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 的所有形式.

设 $a_n = a_1 + (n-1)d$, $\{b_n\}$ 的公差为 d_1 , 首项为 $b_1 = k_1d_1$; $\{c_n\}$ 的公差为 d_2 , 首项为 $c_1 = k_2d_2$, 其中 k_1, k_2 均为大于等于 -1 的整数, 则 $b_n = (n+k_1-1)d_1$, $c_n = (n+k_2-1)d_2$.

由 $a_n = b_n + c_n$, 得

$$a_1 + (n-1)d = (n+k_1-1)d_1 + (n+k_2-1)d_2,$$

即

$$nd + (a_1 - d) = n(d_1 + d_2) + [(k_1 - 1)d_1 + (k_2 - 1)d_2],$$

解得

$$\begin{cases} d_1 = \frac{a_1 - k_2 d}{k_1 - k_2}, \\ d_2 = \frac{k_1 d - a_1}{k_1 - k_2}, \end{cases}$$

其中 k_1, k_2 均为大于等于 -1 的整数.

所以令

$$\begin{cases} b_n = (2-n)a_1, \\ c_n = (n-1)(a_1 + d), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} b_n = \frac{n(a_1 + d)}{2}, \\ c_n = \frac{(n-2)(d - a_1)}{2} \end{cases}$$

等都可以.

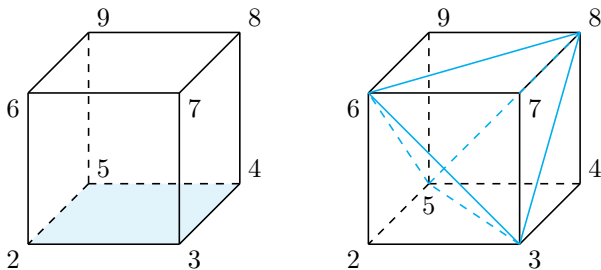
3.3.2 利用图表构造

例题 3.3.3

有 10 个同学, 每天都有 5 个人一起相约去看电影, 他们都喜新厌旧, 任意 2 个人最多一起看两场电影 (比如第一天 5 个人中有韩梅梅和李雷, 第二天里也有韩梅梅和李雷, 那么之后韩梅梅和李雷就再也不会一起看电影了), 10 个同学总共最多可以看几场电影呢?

解 8 场. 每人至多出场 4 次, 否则需要见至少 20 人次, 必然会有人见超过 2 次. 于是 10 个同学最多可以看 8 场电影, 下面构造 8 场的例子.

如图, 将 1 和 0 取出, 剩下的 8 个点看成正方体的 8 个顶点, 形成 6 个面:



(2345), (6789), (2367), (4589), (2569), (3478).

再取两个正四面体的顶点 (2479), (3568).

然后将 1 和 0 放入其中就构造出了 8 场的例子:

(12345), (16789), (12367), (14589), (34780), (25690), (24790), (35680).

例题 3.3.4

设集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 n 个不同子集, 对于集合 $k, l \in \mathbb{N}^*$, 且 $k, l \leq n$, 规定:

- ① 集合 A_k 中至少含有三个元素, 且 $k \notin A_k$;
- ② $k \in A_k$ 的充要条件是 $l \notin A_k (k \neq l)$.

作 n 行 n 列数表, 定义数表中位于第 k 行第 l 列的数为

$$a_{kl} = \begin{cases} 0, k \notin A_l; \\ -1, k \in A_l. \end{cases}$$

- (1) 判断该数表中每一列至少有多少个 -1 ;
 (2) 请构造出 $\{1, 2, \dots, 7\}$ 的 7 个不同子集 $A_1, A_2, \dots, A_7$, 使其同时满足①与② (只要写出一种答案即可);
 (3) 证明: $n \geq 7$.

解 (1) 由规定, 该数表中每一列至少有 3 个 -1 ;

(2) 由规定, 该数表的对角线 $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = 0$, 并且若 $a_{ij} = 0, i \neq j$, 则 $a_{ij} = -1$, 这就是题意规定的直观解释.

经过尝试, 容易得到填表方式:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0						
2		0					
3			0				
4				0			
5					0		
6						0	
7							0

以及

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	-1	-1	-1
2	-1	0	0	0	0	-1	-1
3	-1	-1	0	0	0	0	-1
4	-1	-1	-1	0	0	0	0
5	0	-1	-1	-1	0	0	0
6	0	0	-1	-1	-1	0	0
7	0	0	0	-1	-1	-1	0

(3) 由 (1) 数表中的 -1 至少有 $3n$ 个, 由 (2) 数表中的 -1 至多有 $\frac{n^2 - n}{2}$ 个. 从而

$$\frac{n^2 - n}{2} \geq 3n,$$

即 $n \geq 7$. 原命题得证.

3.3.3 利用公式构造

例题 3.3.5

(2010 年江西) 证明以下命题:

- (1) 对任意正整数 a , 都存在正整数 $b, c (b < c)$, 使得 a^2, b^2, c^2 成等差数列;
- (2) 存在无穷多个互不相似的三角形 $\triangle_n$, 其边长 a_n, b_n, c_n 为正整数, 且 a_n^2, b_n^2, c_n^2 成等差数列.

解 (1) 根据题意有 $2b^2 - c^2 = a^2$, 事实上, 只需要寻找方程 $x^2 - 2y^2 = -1$ 的一组特解 (x, y) , 然后令 $(a, b, c) = (a, ya, xa)$ 即可. 由于 $\sqrt{2} \approx 1.414 = \{1, 2, 2, 2, 2, 5\}$, 于是不难得到不定方程

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

的基本解 $(7, 5)$. 因此对任意正整数 a , 都存在正整数 $b = 7a$, $c = 5a$, 使得 a^2, b^2, c^2 成等差数列.

(2) 令 $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = b^2$, 这显然是以 $\frac{a+c}{2}, \frac{a-c}{2}, b$ 为三边的直角三角形. 我们知道, 对于一个直角三角形的三边, 总是可以写作 $1 + \tan^2 \theta, 1 - \tan^2 \theta, 2 \tan \theta$ 的. 不妨让 $\tan \theta = \frac{m}{n}$ 为一个有理数, 同比例扩大 m^2 倍后得到方程组:

$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = m^2 - n^2, \\ \frac{a-c}{2} = 2mn, \\ b = m^2 + n^2. \end{cases}$$

解之, 令 $n = 1$, 就可以得到 $a = m^2 + 2m - 1$, $c = m^2 - 2m - 1$, $b = m^2 + 1$.

3.3.4 常见命题背景

例题 3.3.6

已知数列 $\{a_n\}$ 的项数为 n , 各项均为正整数, $a_n = 1$, 且

$$a_{i+1} = \begin{cases} \frac{a_i}{2}, & 2 \mid a_i, \\ a_i - 1, & 2 \nmid a_i, \end{cases}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n-1$. 设集合 M 表示 a_1 所有可能取值的集合, $\text{card}(M)$ 表示 M 的元素个数.

- (1) 若 $n = 4$, 求 $\text{card}(M)$ 的值;
- (2) 求证: $n \leq a_1 \leq 2^{n-1}$;
- (3) 若 $a_1 \leq 2015$, 求 n 的最大值, 并直接写出 n 取最大值时的 $\text{card}(M)$ (结论不要求证明).

解 (1) 从 $a_4 = 1$ 开始往前倒推: a_3 的所有可能取值为 2; a_2 的所有可能取值为 3, 4; a_1 的所有可能取值为 6, 5, 8.

于是 $\text{card}(M) = 3$.

(2) 从第 (1) 小题的倒推过程可以看出 $a_{n-1} = 2$, 且如果 $p \leq a_k \leq q$, 其中 $2 \leq k \leq n-1 (k \in \mathbb{N}^*)$, 那么

$$p+1 \leq a_{k-1} \leq 2q,$$

这样倒推到首项, 就有

$$n \leq a_1 \leq 2^{n-1}.$$

(3) 如果说解决第 (2) 小题时我们只需要对递推过程进行上下界分析而无需具体分析变化过程的细节的话, 第 (3) 小题就要求我们理解递推过程的本质.

事实上, 与十进制下的数除以 10 得到的结果 (如果能整除的话) 相当于抹去最后面的“0”一样 (比如, $\frac{2310}{10} = 231$), 一个偶数除以 2 就相当于将其表示成二进制数, 然后抹去最后面的“0”, 比如 $(18)_{10} = (10010)_2$, 而 $\frac{18}{2} = 9 = (1001)_2$. 发掘出这样的直观解释后, 就可以得到项数 n 与首项 a_1 的关系了. 由于减去 1 相当于将尾巴上的 1 改为 0, 除以 2 相当于将尾巴上的 0 抹去, 因此 n 的值就是将首项 a_1 改写为二进制数后的数位数为 1 的数位数之和再减去 1, 例如当 $a_1 = 23$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为:

$$23, 22, 11, 10, 5, 4, 2, 1,$$

共 8 项, 此时 $(23)_{10} = (10111)_2$, 共 5 位, 其中 4 个数位上的数字为 1.

回到 (3) 中的问题, 我们知道

$$(2015)_{10} = (11111011111)_2,$$

当 $a_1 \leq 2015$ 时, 数位数为 1 的数位数之和至多为 21, 因此 n 的最大值为 20. 而可以使得项数为 20 的首项 a_1 只可能是

$$(11111011111)_2, (11110111111)_2, (11101111111)_2, (11011111111)_2, (10111111111)_2,$$

共 5 个, 于是 $\text{card}(M) = 5$.

例题 3.3.7

(2016 年海淀二模) 已知集合 $\Omega_n = \{X | X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 其中 $n \geq 3$. 对任意 $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, 称 x_i 为 X 的第 i 个坐标分量. 若 $S \subseteq \Omega_n$, 且满足如下两条性质:

- ① S 中的元素个数不少于 4 个;
- ② $\forall X, Y, Z \in S$, 存在 $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 X, Y, Z 的第 m 个坐标分量是 1;

则称 S 为 Ω_n 的一个好子集.

(1) $S = \{X, Y, Z, W\}$ 为 Ω_3 的一个好子集, 且 $X = (1, 1, 0)$, $Y = (1, 0, 1)$, 写出 Z, W ;

(2) 若 S 为 Ω_n 的一个好子集, 求证: S 中的元素个数不超过 2^{n-1} ;

(3) 若 S 为 Ω_n 的一个好子集, 且 S 中恰好有 2^{n-1} 个元素, 求证: 一定存在唯一一个 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 S 中所有元素的第 k 个坐标分量都是 1.

解 (1) $Z = (1, 0, 0)$, $W = (1, 1, 1)$ 或 $Z = (1, 1, 1)$, $W = (1, 0, 0)$.

(2) 若 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 定义

$$\overline{X} = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n),$$

则 $X, \overline{X}$ 中至多只有一个在集合 S 中, 因此命题得证.

(3) 若 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 定义

$$X \cdot Y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n),$$

并记 $O = (0, 0, \dots, 0)$, 则 $\forall X, Y, Z \in S, X \cdot Y \cdot Z \neq O$. 根据第 (2) 小题的结论, 若 $A \in \Omega_n$, 则 $A \in S$ 等价于 $\overline{A} \notin S$. 因此若 $X, Y \in S$, 则 $\overline{X \cdot Y} \notin S$, 因此 $X \cdot Y \in S$. 设 $S = \{X_1, X_2, \dots, X_{2^{n-1}}\}$, 则可得

$$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_{2^{n-1}} = X_{(1,2)} \cdot X_3 \cdots X_{2^{n-1}} = \cdots = X_{(1,2,\dots,2^{n-1}-2)} \cdot X_{2^{n-1}-1} \cdot X_{2^{n-1}} \neq O,$$

其中 $X_{(1,2,\dots,k)} = X_1 \cdot X_2 \cdots X_k \in S$. 因此原命题得证.

注 事实上, 每个 Ω_n 中的元素都可以与 n 元集合的一个子集建立对应, 此时 $\overline{X}$ 对应集合的补集; 而 $X \cdot Y$ 对应集合的交集.

3.3.5 论证举例

例题 3.3.8

(2012 年海淀高三期末理) 已知集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, n\} (n \in \mathbb{N}^*)$, 若集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq M (m \in \mathbb{N}^*)$, 且对任意的 $b \in M$, 存在 $a_i, a_j \in A (1 \leq i \leq j \leq m)$, 使得 $b = \lambda_1 a_i + \lambda_2 a_j$ (其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in \{-1, 0, 1\}$), 则称集合 A 为集合 M 的一个 m 元基底.

(1) 分别判断下列集合 A 是否为集合 M 的一个二元基底, 并说明理由:

① $A = \{1, 5\}$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

② $A = \{2, 3\}$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(2) 若集合 A 是集合 M 的一个 m 元基底, 证明: $m(m+1) \geq n$;

(3) 若集合 A 为集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$ 的一个 m 元基底, 求出 m 的最小可能值, 并写出当 m 取最小值时 M 的一个基底 A .

解 (1) ① 不是, $3 \in M$, 但无法由 A 得到; ② 是.

(2) 若集合 A 是集合 M 的一个 m 元基底, 则其至多能够表示的正整数为

$$2m + 2C_m^2 = 2m + m(m-1) = m(m+1),$$

所以 $m(m+1) \geq n$.

(3) m 的最小可能值为 5.

首先, $A = \{1, 3, 5, 9, 16\}$ 是 M 的一个 5 元基底.

其次, 由 (2), $m(m+1) \geq 19$, $m \geq 4$. 下面证明不存在 4 元基底.

用反证法: 设 $A = \{a, b, c, d\}$ ($a < b < c < d$) 是 M 的一个 4 元基底. 则由 (2), A 中的 4 个元素至多表示出 4 组共 20 个数:

第 1 组: a, b, c, d ;

第 2 组: $2a, 2b, 2c, 2d$;

第 3 组: $a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d$;

第 4 组: $b-a, c-a, d-a, c-b, d-b, d-c$.

注意到第 2 组数都是偶数, 第 3 组和第 4 组数对应奇偶性相同, 于是设 a, b, c, d 中有 x 个偶数, 则

当 $x=4$ 时, 第 3 组中有 6 个偶数, 4 个组共有 20 个偶数;

当 $x=3$ 时, 第 3 组中有 3 个偶数, 4 个组共有 13 个偶数;

当 $x=2$ 时, 第 3 组中有 2 个偶数, 4 个组共有 10 个偶数;

当 $x=1$ 时, 第 3 组中有 3 个偶数, 4 个组共有 13 个偶数;

当 $x=0$ 时, 第 3 组中有 6 个偶数, 4 个组共有 16 个偶数.

而 M 中只有 9 个偶数, 于是只有情形③可能, 并且要求 4 个组中的 20 个数中存在两个相同的 M 中的偶数. $2d$ 是最大数且为偶数, $2d \leq 18, d \leq 9$. 因此第二大的数 $c+d=19$. 但 $c+d \leq d-1+d \leq 17$, 矛盾. 因此不存在 M 的 4 元基底.

例题 3.3.9

(2013 年石景山一模) 给定有限单调递增数列 $\{x_n\}$ ($x \in \mathcal{N}^*, n \geq 2$) 且 $x_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq n$),

定义集合 $A = \{(x_i, x_j) \mid 1 \leq i, j \leq n, \text{且 } i, j \in \mathcal{N}^*\}$. 若对任意点 $A_1 \in A$, 存在点 $A_2 \in A$ 使得 $\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{OA_2}$ (O 为坐标原点), 则称数列 $\{x_n\}$ 具有性质 P .

(1) 判断数列 $\{x_n\}: -2, 2$ 和数列 $\{y_n\}: -2, -1, 1, 3$ 是否具有性质 P , 简述理由.

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 具有性质 P , 求证:

① 数列 $\{x_n\}$ 中一定存在两项 x_i, x_j 使得 $x_i + x_j = 0$;

② 若 $x_1 = -1$, $x_2 > 0$ 且 $x_n > 1$, 则 $x_2 = 1$.

(3) 若数列 $\{x_n\}$ 只有 2013 项且具有性质 P , $x_1 = -1$, $x_3 = 2$, 求 $\{x_n\}$ 的所有项和 S_{2013} .

解 (1) $\{x_n\}$ 具有性质 P , 而对于 $\{y_n\}$, 考虑 $A_1 = (-2, 3)$ (或 $(3, -2)$), 不存在任何点 $A_2 \in A$ 使得 $\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{OA_2}$, 因此不具有性质 P .

(2) ① 在 (1) 中, 注意到 $(-1, 1)$ 的作用是与直线 $y = x$ 上的点配对, 因此取 $A_1(x_n, x_n)$, 则存在点 $A_2(x_i, x_j)$ 使得 $x_n x_i + x_n x_j = x_n(x_i + x_j) = 0$, 此时由 $x_n \neq 0$ ($1 \leq i \leq n$), 得 $x_i + x_j = 0$;

② 由 ①, 1 在数列中, 因此 $x_2 \leq 1$. 用反证法, 若 $x_2 \neq 1$, 则 $0 < x_2 < 1$. 如图, 考虑点 (x_2, x_n) 无从配对, 因此取 $A_1(x_2, x_n)$, 则存在 $A_2(x_i, x_j)$, 使得 $x_2 x_i + x_n x_j = 0$.

此时 $x_n = -\frac{x_2 x_i}{x_j}$. 由于 -1 是数列 $\{x_n\}$ 中的唯一负数, 因此 $x_i = -1$ 或 $x_j = -1$.

若 $x_i = -1$, 则 $x_n = \frac{x_2}{x_j} \leq 1$ 与 $x_n > 1$ 矛盾 ($j \geq 2$, 因此 $x_j \geq x_2$);

若 $x_j = -1$, 则 $x_n = x_2 x_i < x_i \leq x_n$, 矛盾.

综上, $x_2 = 1$.

(3) 显然 $-1 < x_2 < 2$, 且 $x_2 \neq 0$.

若 $-1 < x_2 < 0$, 则不存在 x_i, x_j 使得 $x_i + x_j = 0$, 与 (2) 中的 ① 矛盾.

因此 $x_2 > 0$, 进而由 (2) 中 ②, 得 $x_2 = 1$.

接下来证明 $x_{n+1} = 2x_n, n \geq 2$.

1° 当 $n = 2$ 时, 命题成立.

2° 若当 $n \leq k (k \in \mathcal{N}^*, k \geq 2)$ 时, 命题成立, 则 $n = k + 1$ 时, 取 A_i 分别为 $(x_i, x_{k+1}), i = 2, \dots, k$, 且 $\overrightarrow{OA_i} \perp \overrightarrow{OB_i}$, 其中 B_i 为 $(y_i, -1)$ (与 (2) 中过程类似可得). 则

$$x_2 y_2 - x_{k+1} = x_3 y_3 - x_{k+1} = \dots = x_k y_k - x_{k+1} = 0,$$

即

$$x_2 y_2 = x_3 y_3 = \dots = x_k y_k = x_{k+1}.$$

由于 $1 = x_2 < x_3 < \dots < x_k$, 于是

$$x_{k+1} = y_2 > y_3 > \dots > y_k > 1.$$

进而

$$y_2, y_3, \dots, y_k \in \{x_2, x_3, \dots, x_{k+1}\},$$

从而

$$y_2 = x_{k+1}, y_3 = x_k, \dots, y_k = 2,$$

于是 $x_{k+1} = 2x_k$.

3.3.6 课后习题

习题 3.3.1 (2015 年清华金秋营) 已知集合 $S_n = \{X | X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\} (n \geq 2)$. 对于 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n, B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$, 定义 A 与 B 的差为

$$A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|);$$

A 与 B 之间的距离为 $d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$.

(1) $\forall A, B, C \in S_n$, 证明: $d(A - C, B - C) = d(A, B)$, 且 $d(A, B), d(A, C), d(B, C)$ 三个数中至少有一个是偶数;

(2) 设 $P \subseteq S_n$, P 中有 $m (m \geq 2)$ 个元素, 记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\bar{d}(P)$. 证明: $\bar{d}(P) \leq \frac{mn}{2(m-1)}$;

(3) 当 $n = 3$ 时, 若 M 满足: $M \subseteq S_3$ 且 M 中元素间的距离均为 2, 试写出含有元素个数最多的所有

集合 M .

解 (1) $d(A-C, B-C) = d(A, B)$ 显然成立.

因为 $(a_i - b_i) + (b_i - c_i) + (c_i - a_i) = 0$, 而 $(a_i - b_i) + (b_i - c_i) + (c_i - a_i)$ 与 $|a_i - b_i| + |b_i - c_i| + |c_i - a_i|$ 的奇偶性相同, 故

$$d(A, B) + d(A, C) + d(B, C)$$

是偶数. 所以 $d(A, B), d(A, C), d(B, C)$ 三个数中至少有一个是偶数.

(2) $\bar{d}(P) = \frac{1}{C_m^2} \sum_{A, B \in P} d(A, B)$, 其中 $\sum_{A, B \in P} d(A, B)$ 表示 P 中所有两个元素间距离的总和. 设 P 中所有元素的第 i 个位置的数字中共有 t_i 个 1, $m - t_i$ 个 0, 则

$$\sum_{A, B \in P} d(A, B) = \sum_{i=1}^n t_i(m - t_i).$$

由于 $t_i(m - t_i) \leq \frac{m^2}{4} (i = 1, 2, \dots, n)$, 所以

$$\sum_{A, B \in P} d(A, B) \leq \frac{nm^2}{4}.$$

从而

$$\bar{d}(P) = \frac{1}{C_m^2} \sum_{A, B \in P} d(A, B) \leq \frac{nm^2}{4C_m^2} = \frac{mn}{2(m-1)}.$$

(3) S_3 中含有 8 个元素, 可将其看成正方体的 8 个顶点. 易知集合 M 中的元素所对应的点, 应该两两位于该正方体面对角线的两个端点处. 所以集合

$$M = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \text{ 或 } M = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}.$$

习题 3.3.2 (2014 年丰台一模) 从数列 $\{a_n\}$ 中抽出一些项, 依原来的顺序组成的新数列叫数列 $\{a_n\}$ 的一个子列.

(1) 写出数列 $\{3n-1\}$ 的一个是等比数列的子列;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列, 首项 $a_1 = 1$, 公比 $q > 0$ 且 $q \neq 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 是否存在一个子列为无穷等差数列? 若存在, 写出该子列的通项公式; 若不存在, 证明你的结论.

(3) 若一个无穷项等差数列各项均为正整数, 是否一定能从中抽取出一个无穷项等比子列?

(4) 任意一个无穷项等差数列, 是否一定能从中抽取出一个无穷项等比子列?

解 (1) $a_n = 2^{2n-1}$.

(2) 不存在.

(3) 是. 设该无穷项等差数列的通项为 $a, a+d, a+2d, \dots$, 其中 a, d 均为正整数, 则令 $b_n = a(d+1)^{n-1}$ 即可.

(4) 否. 考虑数列 $1, 1+\pi, 1+2\pi, \dots$ 即可.

习题 3.3.3 (2012 年海淀一模) 对于集合 M , 定义函数 $f_M(x) = \begin{cases} -1, & x \in M, \\ 1, & x \notin M. \end{cases}$ 对于两个集合 M, N , 定义集合 $M \Delta N = \{x \mid f_M(x) \cdot f_N(x) = -1\}$. 已知 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$.

(1) 写出 $f_A(1)$ 和 $f_B(1)$ 的值, 并用列举法写出集合 $A \Delta B$;

(2) 用 $\text{card}(M)$ 表示有限集合 M 所含元素的个数, 求 $\text{card}(X \Delta A) + \text{card}(X \Delta B)$ 的最小值;

(3) 有多少个集合对 (P, Q) , 满足 $P, Q \subseteq A \cup B$, 且 $(P \Delta A) \Delta (Q \Delta B) = A \Delta B$?

解 (1) $f_A(1) = 1$, $f_B(1) = -1$, $A \Delta B = \{1, 6, 10, 16\}$.

(2) 如图 A, B 把全集分成四个部分, 设 X 中的元素在第 I, II, III, IV 部分的个数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 于是

$$\begin{aligned} \text{card}(X \Delta A) + \text{card}(X \Delta B) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + 2\text{card}(X) - 2\text{card}(AX) - 2\text{card}(BX) \\ &= 10 + 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 2(x_2 + x_3) - 2(x_3 + x_4) = 10 + -2(x_1 - x_3), \end{aligned}$$

而 $x_1 \geq 0, 0 \leq x_3 \leq \text{card}(A \cap B) = 3$, 所以

$$\text{card}(X \Delta A) + \text{card}(X \Delta B) \geq 10 + 2(0 - 3) = 4.$$

此时 X 只需满足① $A \subseteq A \cup B$, ② $A \cap B \subseteq X$. (3) 对集合间的运算“ Δ ”考察其交换律和结合律. 显然“ Δ ”满足交换律, $B \Delta A = A \Delta B$; 不难证明, $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (利用韦恩图). 所以

$$(P \Delta A) \Delta (Q \Delta B) = (P \Delta Q) \Delta (A \Delta B).$$

一方面, $M \Delta N = N \Leftrightarrow M = \emptyset$, 另一方面, $M \Delta N = \emptyset \Leftrightarrow M = N$, 所以 $P = Q$. 由于 $\text{card}(A \cup B) = 7$, 因此 (P, Q) 有 $2^7 = 128$ 对.

习题 3.3.4 (2016 年海淀一模) 给定正整数 $n(n \geq 3)$, 集合 $U_n = \{1, 2, \dots, n\}$. 若存在集合 A, B, C , 同时满足下列条件:

① $U_n = A \cup B \cup C$, 且 $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$;

② 集合 A 中的元素都为奇数, 集合 B 中的元素都为偶数, 所有能被 3 整除的数都在集合 C 中 (集合 C 中还可以包含其它数);

③ 集合 A, B, C 中各元素之和分别记为 S_A, S_B, S_C , 有 $S_A = S_B = S_C$,

则称集合 U_n 为可分集合.

(1) 已知 U_8 为可分集合, 写出相应的一组满足条件的集合 A, B, C ;

(2) 证明: 若 n 是 3 的倍数, 则 U_n 不是可分集合;

(3) 若 U_n 为可分集合且 n 为奇数, 求 n 的最小值.

解 (1) $A = \{5, 7\}, B = \{4, 8\}, C = \{1, 2, 3, 6\}$.

(2) 设 $n = 3m$, 其中 m 为正整数. 若 U_n 是可分集合, 则

$$S_A = S_B = S_C = \frac{1 + 2 + \dots + 3m}{3} = \frac{3m^2 + m}{2},$$

而

$$S_C \geq 3 + 6 + \cdots + 3m = \frac{3m^2 + 3m}{2} > \frac{3m^2 + m}{2},$$

矛盾.

所以若 n 是 3 的倍数, 则 U_n 不是可分集合.

(3) 因为所有元素的和为 $\frac{n(n+1)}{2}$, 又 B 中的元素都为偶数, 所以 $S_B = \frac{n(n+1)}{6} = 2m$, 其中 m 为正整数. 所以 $n(n+1) = 12m$.

因为 $3 \mid n(n+1), 3 \nmid n$, 故 $3 \mid n+1$. 因为 $4 \mid n(n+1), 4 \nmid n$, 故 $4 \mid n+1$. 由于 $(3, 4) = 1$, 所以 $12 \mid n+1$. 设 $n = 12k - 1$, 其中 k 为正整数.

定义集合 D 由集合 U_n 中所有不是 3 的倍数的奇数组成, 集合 E 由集合 U_n 中所有不是 3 的倍数的偶数组成, 则 $A \subseteq D, B \subseteq E$. 此时集合 D, E 中的元素之和都是 $24k^2$, 而 $S_A = S_B = S_C = 24k^2 - 2k$, 所以必须从集合 D, E 中各取出一些和为 $2k$ 的元素.

由于集合 D 中的元素都是奇数, 故必须从集合 D 中取出偶数个元素, 因此 $2k \geq 6$, 此时 $n \geq 35$. 而令

$$A = \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\},$$

$$B = \{8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32, 34\},$$

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 1, 5, 2, 4\},$$

此时 U_{35} 是可分集合. 所以 n 的最小值是 35.

习题 3.3.5 (2011 年海淀高三期末)

已知集合 $A = \{1, 2, 3, \cdots, 2n\} (n \in \mathbb{N}^*)$, 对于 A 的一个子集 S , 若存在不大于 n 的正整数 m , 使得对于 S 中的任意一对元素 s_1, s_2 , 都有 $|s_1 - s_2| \neq m$, 则称 S 具有性质 P .

(1) 当 $n = 10$ 时, 试判断集合 $B = \{x \in A \mid x > 9\}$ 和 $C = \{x \in A \mid x = 3k - 1, k \in \mathbb{N}^*\}$ 是否具有性质 P ? 并说明理由;

(2) 若 $n = 1000$ 时,

① 若集合 S 具有性质 P , 那么集合 $T = \{2001 - x \mid x \in S\}$ 是否一定具有性质 P ? 并说明理由;

② 若集合 S 具有性质 P , 求集合 S 中元素个数的最大值.

解 (1) 对于集合 B , 取 $b_1 = 10$, 则无论 m 取任何不大于 10 的整数值, 都有 $b_2 = 10 + m \in B$, 因此集合 B 不具有性质 P ;

对于集合 C , 由于 C 中的元素除 3 的余数均为 2, 因此其中任意两个元素的差均为 3 的整数倍, 因此可以取 $m = 1$ 或 $m = 2$, 都可以说明集合 C 具有性质 P ;

(2) 当 $n = 1000$ 时, 则 $A = \{1, 2, 3, \cdots, 1999, 2000\}$.

① 若集合 S 具有性质 P , 那么集合 $T = \{2001 - x \mid x \in S\}$ 一定具有性质 P .

用反证法. 若 T 不具有性质 P , 则存在 $t_1, t_2 \in T, m \leq n, m \in \mathbb{N}^*$ 使得 $|t_1 - t_2| = m$.

根据集合 T 的定义, 设 $t_1 = 2001 - s_1, t_2 = 2001 - s_2$, 其中 $s_1, s_2 \in S$, 则有

$$|t_1 - t_2| = |(2001 - s_1) - (2001 - s_2)| = |s_1 - s_2| = m.$$

这与集合 S 具有性质 P 矛盾. 因此集合 T 一定具有性质 P .

② 对于每个不大于 n 的正整数 m , 我们都可以将集合 A 划分为

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

共 m 个同余类, 其中 $A_k = \{k, m+k, 2m+k, \dots\}$. 这样一来, 对于集合 A 中的任意两个元素 a_1, a_2 , 如果它们位于不同的同余类中, 那么一定有 $|a_1 - a_2| \neq m$. 因此具有性质 P 的集合 S 是集合 A 的 m 个同余类的子集的并. 下面对集合 A_k 进行分析:

容易证明, 从集合 A_k 中选出的元素不超过 $\frac{\text{card} A_k + 1}{2} \leq \frac{2}{3} \text{card} A_k$, 于是

$$\text{card } S \leq \frac{2}{3} \cdot 2n = 1333\frac{1}{3}.$$

另一方面, 取 $m = 667$, 使得每行的利用率尽可能靠近 $\frac{2}{3}$. 可以构造集合

$$S = \{1, 2, \dots, 667, 1335, 1336, \dots, 2000\}.$$

综上, 集合 S 中元素个数的最大值为 1333.

习题 3.3.6 (2011 年西城二模改编) 若 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 为集合 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$) 的子集, 且满足两个条件:

① $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = A$;

② 对任意的 $\{x, y\} \subseteq A$, 至少存在一个 $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$, 使 $A_i \cap \{x, y\} = \{x\}$ 或 $\{y\}$, 则称集合组 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 具有性质 P .

(1) 当 $n = 4$ 时, 判断下列两个集合组是否具有性质 P , 集合组 1: $A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4\}$; 集合组 2: $A_1 = \{2, 3, 4\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{1, 4\}$.

(2) 当 $n = 7$ 时, 写出一个具有性质 P 的集合组 A_1, A_2, A_3 ;

(3) 当 $n = 100$ 时, 集合组 $A_1, A_2, \dots, A_t$ 是具有性质 P 且所含集合个数最小的集合组, 求 t 的值及 $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_t|$ 的最小值. (其中 $|A_i|$ 表示集合 A_i 所含元素的个数)

解 (1) 集合组 1 具有性质 P , 集合组 2 不具有性质 P .

(2) 作 m 行 n 列的数表, 第 i 行的第 k 列的数用 1 和 0 表示其对应的数 k 是否在集合 A_i 中.

如图, (1) 中的两个集合组对应的数表为

	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	0	1	1	0
3	0	0	0	1

和

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	1	1	0
3	1	0	0	1

从数表中可以发现, 集合组 1 中每一列的数 100, 010, 110, 001 都不相同, 而集合组 2 中第 2 列和第 3 列的数均为 110, 这就是性质 P 的直观解释.

对于 $n=7$, 可以依照二进制数的表示法填表如下:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	1	1	0	0	1	1
3	1	0	1	0	1	0	1

于是集合组 $A_1 = \{4, 5, 6, 7\}$, $A_2 = \{2, 3, 6, 7\}$, $A_3 = \{1, 3, 5, 7\}$ 符合题意.

(3) 由 (2), 由于 $100_{(10)} = 1100100_{(2)}$, 至少需要 7 个集合组成集合组.

7 位的二进制数中, 只有 1 个 1 的, 有 $C_7^1 = 7$ 个;

有 2 个 1 的, 有 $C_7^2 = 21$ 个;

有 3 个 1 的, 有 $C_7^3 = 35$ 个;

有 4 个 1 的, 有 $C_7^4 = 35$ 个;

有 5 个 1 的, 有 2 个;

于是 $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_t|$ 的最小值为

$$1 \times 7 + 2 \times 21 + 3 \times 35 + 4 \times 35 + 5 \times 2 = 304.$$

习题 3.3.7 (2016 年丰台一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 是无穷数列, $a_1 = a, a_2 = b$ (a, b 是正整数), 且

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}}, & \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1, \\ \frac{a_{n-1}}{a_n}, & \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq 1. \end{cases}$$

(1) 若 $a_1 = 2, a_2 = 1$, 写出 a_4, a_5 的值;

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 k 项 $a_k = 1$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 中有无穷项为 1;

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 中任何一项都不等于 1, 记 $b_n = \max\{a_{2n-1}, a_{2n}\} (n = 1, 2, 3, \cdots)$. 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是单调递减数列.

解 (1) $a_4 = 2, a_5 = 1$.

(2) 当 $a_k = 1$ 时, 设 $a_{k+1} = m$.

情形 1 若 $m = 1$, 则 $a_{k+1} = a_{k+2} = a_{k+3} = \cdots = 1$;

情形 2 若 $m > 1$, 则 $a_{k+2} = m, a_{k+3} = 1$;

情形 3 若 $m < 1$, 则 $a_{k+2} = \frac{1}{m}, a_{k+3} = \frac{1}{m^2}, a_{k+4} = \frac{1}{m}, a_{k+5} = \frac{1}{m}, a_{k+6} = 1$.

综上所述, 当 $a_k = 1$ 时, 在无穷数列 $\{a_n\}$ 中, 第 k 项之后总存在值为 1 的项, 以此类推, 数列 $\{a_n\}$ 中有无穷项为 1.

(3) 由题意可知, $a_n > 1$ 对于任意正整数 n 恒成立.

因为 $b_{n+1} = \max\{a_{2n+1}, a_{2n+2}\} = \max\left\{\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}, \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}, \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}, \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right\}$, 其中

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} < a_{2n} \leq b_n, \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} < a_{2n-1} \leq b_n, \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} < a_{2n} \leq b_n,$$

故只需证明当 $b_{n+1} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} > 1$ 时, 有 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} < b_n$ 成立即可.

习题 3.3.8 (2011 年朝阳二模) 对于正整数 a, b , 存在唯一一对整数 q 和 r , 使得 $a = bq + r$, 其中 $0 \leq r < b$. 特别地, 当 $r = 0$ 时, 称 b 能整除 a , 记作 $b \mid a$. 已知 $A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}$.

(1) 存在 $q \in A$, 使得 $2011 = 91q + r$ ($0 \leq r < 91$), 试求 q, r 的值;

(2) 求证: 不存在函数 $f: A \rightarrow \{1, 2, 3\}$, 使得对任意的整数 $x_1, x_2 \in A$, 若 $|x_1 - x_2| \in \{1, 2, 3\}$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$;

(3) 若 $B \subseteq A$, $\text{card}(B) = 12$ ($\text{card}(B)$ 指集合 B 中的元素的个数), 且存在 $a, b \in B$, $b < a$, $b \mid a$, 则称 B 为 "和谐集". 求最大的 $m \in A$, 使含 m 的集合 A 的有 12 个元素的任意子集为 "和谐集", 并说明理由.

解 (1) 因为 $2011 = 91 \times 22 + 9$, 所以 $q = 22$, $r = 9$.

(2) 用反证法.

若存在这样的函数 $f(x)$, 则对任意的整数 $x_1, x_2 \in A$, 若 $|x_1 - x_2| \in \{1, 2, 3\}$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 取 A 中的整数 $m, m+1, m+2, m+3$, 则

$$f(m) \neq f(m+1), f(m) \neq f(m+2), f(m) \neq f(m+3),$$

而

$$f(m+1) \neq f(m+2), f(m+1) \neq f(m+3), f(m+2) \neq f(m+3).$$

也就是说 $f(m), f(m+1), f(m+2), f(m+3)$ 两两不等. 因此

$$\text{card}\{y \mid y = f(x), x \in A\} \leq 4,$$

而 $\text{card}\{1, 2, 3\} = 3$, 矛盾. 因此原命题成立.

(3) 从非 "和谐集"

$$\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23\}$$

出发可得符合条件的 $m < 12$, 将其调整:

删去 22, 写下 11; 删去 20, 写下 10; 删去 18, 写下 9; 删去 16, 写下 8.

此时已经通过构造非 "和谐集" 得到符合题意的 $m < 8$. 下面证明 $m = 7$ 时符合题意.

将集合 A 除 7 外的元素划分为

$$A_0 = \{23, 19, 15, 17, 13\}, A_1 = \{22, 11\}, A_2 = \{20, 10, 5\},$$

$$A_3 = \{18, 9, 3\}, A_4 = \{16, 8, 4, 2\}, A_5 = \{12, 6\}, A_6 = \{14, 1\}.$$

设含有 7 的集合 A 的 12 元子集为 X , 若 X 中含有 A_6 中的元素, 则 X 是“和谐集”; 若 X 中不含有 A_6 中的元素, 则除了 A_0 中的 5 个元素以及元素 7 以外, X 至少要在 A_1 到 A_5 中选 6 个元素, 也就是说一定有 2 个元素来自 A_1 到 A_5 中的同一个集合, 于是 X 是“和谐集”.

综上, m 的最大值为 7.

习题 3.3.9 (2012 年朝阳一模) 已知各项均为非负整数的数列 $A_0: a_0, a_1, \dots, a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 满足 $a_0 = 0$, $a_1 + \dots + a_n = n$. 若存在最小的正整数 k , 使得 $a_k = k (k \geq 1)$, 则可定义变换 T , 变换 T 将数列 A_0 变为

$$T(A_0): a_0 + 1, a_1 + 1, \dots, a_{k-1} + 1, 0, a_{k+1}, \dots, a_n.$$

设 $A_{i+1} = T(A_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. (1) 若数列 $A_0: 0, 1, 1, 3, 0, 0$, 试写出数列 A_5 ; 若数列 $A_4: 4, 0, 0, 0, 0$, 试写出数列 A_0 ;

(2) 证明: 存在唯一的数列 A_0 , 经过有限次 T 变换, 可将数列 A_0 变为数列 $n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n$;

(3) 若数列 A_0 经过有限次 T 变换, 可变为数列 $n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n$. 设 $S_m = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$, $m = 1, 2, \dots, n$, 求证 $a_m = S_m - \left\lfloor \frac{S_m}{m+1} \right\rfloor (m+1)$, 其中 $\left\lfloor \frac{S_m}{m+1} \right\rfloor$ 表示不超过 $\frac{S_m}{m+1}$ 的最大整数.

解 (1) $A_0: 0, 1, 1, 3, 0, 0$, $A_1: 1, 0, 1, 3, 0, 0$; $A_2: 2, 1, 2, 0, 0, 0$; $A_3: 3, 0, 2, 0, 0, 0$; $A_4: 4, 1, 0, 0, 0, 0$; $A_5: 5, 0, 0, 0, 0, 0$.

$A_4: 4, 0, 0, 0, 0$, $A_3: 3, 1, 0, 0, 0$; $A_2: 2, 0, 2, 0, 0$; $A_1: 1, 1, 2, 0, 0$; $A_0: 0, 0, 1, 3, 0$.

(2) 记数列 $I: n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \uparrow}, T^k(A_0)$ 表示对 A_0 进行 k 次 T 变换.

则不妨设 $T^m(A_0) = A_m = I$, 则

$$T^{-1}(I): n-1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0 \quad T^{-2}(I): n-2, 0, 2, 0, 0, 0, \dots, 0$$

$$T^{-3}(I): n-3, 1, 0, 2, 0, 0, \dots, 0 \quad T^{-4}(I): n-4, 0, 2, 2, 0, 0, \dots, 0$$

...

变换 T^{-1} 的规则是若存在最小的正整数 k , 使得 $a_k = 0 (k \geq 1)$, 则将数列变为

$$a_0 - 1, a_1 - 1, \dots, a_{k-1} - 1, k, 0, 0, \dots, 0$$

这个变换进行 n 次 (每次变换的结果都是唯一的) 得到 A_0 , 于是 A_0 是唯一可以经过 n 次 T 变换后得到 I 的数列. 原命题得证. (3) 由定义, 显然 S_m 为 m 的整数倍, 且 $0 \leq a_m \leq m$.

而 $a_m = S_m - S_{m-1}$ ，所以 a_m 为 S_m 除以 $m+1$ 后的余数，即

$$a_m = S_m - \left[\frac{S_m}{m+1} \right] (m+1).$$