北京市海淀区高二年级第二学期期中质量检测模拟

数　学　　2021．4

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为一卷（共 100 分）和二卷（共 50 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题 共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1=2$，$a_2=4$，则$a_4=$（　　）

A．6　　B．8　　C．16　　D．32

2．下列求导运算中错误的是（　　）

A．$(3^x)'=3^x\ln 3$　　B．$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

C．$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)'=1+\dfrac{1}{x^2}$　　D．$(\sin x\cdot\cos x)'=\cos 2x$

3．已知m,n,p,q为正整数，在等差数列$\{a_n\}$中，“$m+n>p+q$”是“$a_m+a_n>a_p+a_q$”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知是函数$x=2$就函数$f(x)=x^3-3ax+2$的极小值点，那么函数$f(x)$的极大值为（　　）

A．-2　　B．6　　C．17　　D．18

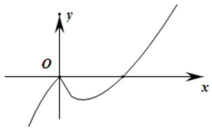
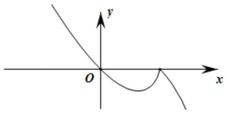
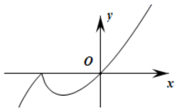
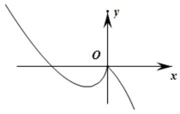
5．如果等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^{n+1}+a$，则常数$a=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．-2　　D．2

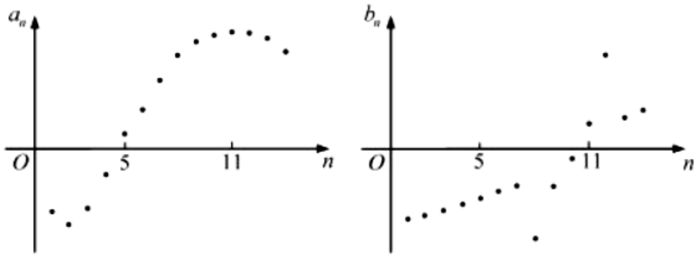
6．用数学归纳法证明$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\ge\dfrac{11}{24}\left(n\in N^*\right)$时，由$n=k$到$n=k+1$时，不等式左边应添加的项是（　　）

A．$\dfrac{1}{2k+1}$　　B．$\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{k+1}$　　C．$\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{2k+2}$　　D．$\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}$

7．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ \dfrac{x}{e^x}, & x\le 0 \end{cases}$，则函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象大致是（　　）

A.  B.  C.  D. 

8．数列 $\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$ 用图象表示如下，记数列 $\left\{a_nb_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，则（　　）.



A．$S_1>S_4$，$S_{10}<S_{11}$　　　　B．$S_4>S_5$，$S_{10}<S_{13}$

C．$S_1<S_4$，$S_{10}>S_{11}$　　　　D．$S_4<S_5$，$S_{10}>S_{13}$

9．做一个无盖的圆柱形水桶，若要使其容积为 27π 且用料最省，则水桶底面圆的半径为（　　）

A．1　　　　B．3　　　　C．5　　　　D．7

10．已知 $\left\{x_n\right\}$ 是递增数列，且 $x_n\ge 0$，则关于数列 $\left\{x_n\right\}$，对任意的正整数 p，q，

下列结论不可能成立的是（　　）

A．$x_{pq}=px_q+qx_p$　　　　B．$x_{p+q}=px_q+qx_p$

C．$x_{pq}=x_p+x_q-1$　　　　D．$x_{p+q}=2x_px_q$

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．已知 $f(x)=\ln(3x-1)$，则 f'（1）＝________.

12．已知 3 个等差数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$，其中数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，已知 $a_n\cdot b_n=S_n$，写出一组符合条件的 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式________________________________

13．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和 S_n，且满足 $a_n+S_n=1$，则 $\dfrac{S_1}{a_1}+\dfrac{S_2}{a_2}+\dfrac{S_3}{a_3}+\cdots+\dfrac{S_9}{a_9}=$__________.

14．若直线 l 与曲线 C 满足下列两个条件：（1）直线 l 在点 P（x_0，y_0）处与曲线 C 相切；（2）曲线 C 在点 P 附近位于直线 l 的两侧，则称直线 l 在点 P 处“切过”曲线 C.给出下列四个命题：

①直线 l：$y=0$ 在点 P（0，0）处“切过”曲线 C：$y=x^3$；

②直线 l：$y=x-1$ 在点 P（1，0）处“切过”曲线 C：$y=\ln x$；

③直线 l：$y=-x+\pi$ 在点 P（π，0）处“切过”曲线 C：$y=\sin x$；

④直线 l：$y=-x+1$ 在点 P（0，1）处“切过”曲线 C：$y=e^x$.其中正确的命题是________________

15．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\dfrac{1}{k}$，$k\geq 2,k\in\mathbf{N}^*$，$[a_n]$表示不超过a_n的最大整数（如$[1.6]=1$，记$b_n=[a_n]$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n）.

①若数列$\{a_n\}$是公差为 1 的等差数列，则$T_4=$__________；

②若数列$\{a_n\}$是公比为$k+1$的等比数列，则$T_n=$__________.

四、解答题（每道题 10 分，共 40 分）

16．已知$\{a_n\}$是等差数列，其前 n 项和为 S_n，已知 $a_5=5$，$S_5=15$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $a_n=\log_2 b_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

17．问题提出：新型冠状病毒是一种人传人，不易被人们直觉发现，危及人们生命的严重病毒．我们把与新型冠状病毒患者有过密切接触的人群称为密切关联者．已知每位密切关联者通过核酸检测被确诊为阳性后的概率为$p\left(0<p<1\right)$．一旦被确诊为阳性后即将其隔离．某位患者在隔离之前，每天有k位密切关联者与之接触，其中被感染的人数为$X\left(0\le X\le k\right)$．该病毒在进入人体后有14天的潜伏期，在这14天内患者无任何症状，则为病毒传播的最佳时间．设每位患者在不知自己患病的情况下的第二天又与k位密切关联者接触并继续传染其他人．小明想通过数学建模分析从某一名患者携带新型冠状病毒的第1天开始算起，第n天新增患者数$E_n\left(n\ge 2\right)$，同时他想研究戴口罩是否能够切实减少病毒传染.

一、模型假设：1. 潜伏期病毒未被发现，持续传播

2. 每位患者每天接触的人数均为k

3. 假设每位患者每天接触的密切关联者被感染人数为定值$X=kp$

二、模型求解：

①根据题意，最初患者自己被感染，即第1天人数为1，

第2天被感染人数增至为：$1+1\cdot kp=1+kp$；

第3天被感染人数增至为：________________

于是可以得出，第n天新增加人数$E_n=$________________，

小明根据自己的生活经验取$k=10$，$p=\frac{1}{2}$

①E_8的值为________________；

②经大量临床数据验证佩戴口罩后被感染患病的概率p'满足关系式$p'=\ln\left(1+p\right)-\frac{2p}{3}$．当$p'$取得最大值时，计算$p'$所对应的${E_6}'$和$p=\frac{1}{2}$所对应的$E_6$值，然后根据计算结果说明佩戴口罩的必要性.

（参考数据：$\ln 2\approx 0.7$，$\ln 3\approx 1.1$，$\ln 5\approx 1.6$，$\frac{1}{3}\approx 0.3$，$\frac{2}{3}\approx 0.7$，$6^6=46650$计算结果保留整数）

三、模型检验与评价：通过与新闻中的数据对比，小明计算出的被感染人数远高于实际的感染人数，你认为原因是什么？________________________________

____

18．已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-mx$.

（1） $m=1$时，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线

（2）求函数 $f(x)$ 的极值；

（3）若函数 $f(x)$ 在区间$\left[0,e^2-1\right]$上恰有两个零点，求 m 的取值范围.

19． n 为给定的大于 2 的正整数，集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，已知数列 A_n： x_1， x_2，…， x_n 满足条件：

①当$1\le i\le n$ 时， $x_i\in S$ ；②当$1\le i<j\le n$ 时， $x_i\ne x_j$.

如果对于$1\le i<j\le n$，有 $x_i>x_j$，则称$\left(x_i,x_j\right)$为数列 A_n 的一个逆序对.记数列 A_n 的所有逆序对的个数为$T\left(A_n\right)$.

（1）若$T\left(A_4\right)=1$，写出所有可能的数列 A_4；

（2）若$T\left(A_n\right)=2$，求数列 A_n 的个数；

（3）对于满足条件的一切数列 A_n，求所有$T\left(A_n\right)$的算术平均值.

二卷（共 50 分）

一、选择题（共三道小题，每题 6 分，18 分）

20．若函数 $f\left(x\right)$ 的导函数的图像关于 y 轴对称，则 $f\left(x\right)$ 的解析式可能为（　　）

A． $f\left(x\right)=3\cos x$　　　　B． $f\left(x\right)=x^3+x^2+1$

C． $f\left(x\right)=\sin 2x$　　　　D． $f\left(x\right)=e^x+x$

21．若 $e^{x-a}\geq \ln x+a$ 对一切正实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A． $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$　　B． $\left(-\infty,1\right]$　　C． $\left(-\infty,2\right]$　　D． $\left(-\infty,e\right]$

22．将一条均匀柔软的链条两端固定，在重力的作用下它所呈现的形状叫悬链线，例如悬索桥等.建立适当的直角坐标系，可以写出悬链线的函数解析式为 $f\left(x\right)=a\cosh\frac{x}{a}$，其中 a 为悬链线系数，$\cosh x$ 称为双曲余弦函数，其函数表达式为 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，相应地双曲正弦函数的函数表达式为 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.若直线 $x=m$ 与双曲余弦函数 C_1 和双曲正弦函数 C_2 分别相交于点 A，B，曲线 C_1 在点 A 处的切线与曲线 C_2 在点 B 处的切线相交于点 P，则（　　）

A． $y=\sinh x\cosh x$ 是偶函数　　　　B． $\cosh\left(x+y\right)=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$

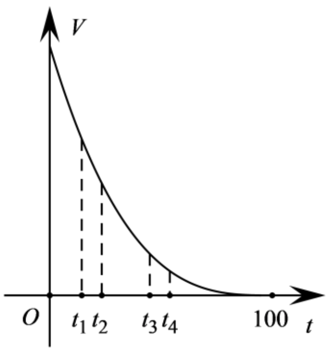
C． $\left|BP\right|$ 随 m 的增大而减小　　　　D． $\triangle PAB$ 的面积随 m 的增大而减小

二、填空题（共三道小题，每题 6 分，18 分）

23．某堆雪在融化过程中，其体积V（单位：m^3）与融化时间t（单位：h）近似满足函数关系：

$V(t)=H\left(10-\frac{1}{10}t\right)^3$（$H$为常数），其图像如图所示.记此堆雪从融化开始到结束的平均融化速度为

$\overline{v}\left(\mathrm{m}^3/\mathrm{h}\right)$.那么$t_1,t_2,t_3,t_4$中，瞬时融化速度等于$\overline{v}\left(\mathrm{m}^3/\mathrm{h}\right)$的时刻是图中的_________.



24．法国数学家拉格朗日于 1778 年在其著作《解析函数论》中提出一个定理：如果函数$y=f\left(x\right)$满足如下条件：

（1）在闭区间$\left[a,b\right]$上是连续不断的；

（2）在区间$\left(a,b\right)$上都有导数.

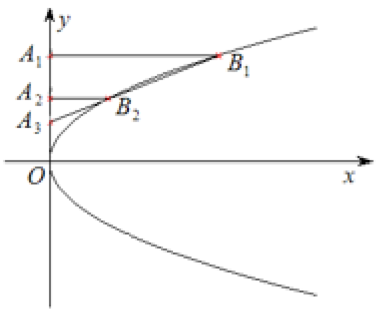
则在区间$\left(a,b\right)$上至少存在一个数ξ，使得$f\left(b\right)-f\left(a\right)=f'\left(\xi\right)\left(b-a\right)$，其中$\xi$称为拉格朗日中值．则$g\left(x\right)=e^x$在区间$\left[0,1\right]$上的拉格朗日中值$\xi=$_______.

25．如图，已知抛物线 $y^2=x$ 及两点 $A_1(0,y_1)$ 和 $A_2(0,y_2)$，其中 $y_1>y_2>0$.过 A_1、A_2 分别作 y 轴的垂线，交抛物线于 B_1、B_2 两点，直线 B_1B_2 与 y 轴交于点 $A_3(0,y_3)$，此时就称 A_1、A_2 确定了 A_3.依此类推，可由 A_2、A_3 确定 A_4、$\cdots$.记 $A_n(0,y_n)$，$n=1$、2、3、$\cdots$.

给出下列三个结论：

①数列 $\{y_n\}$ 是递减数列；②对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$y_n>0$；③若 $y_1=4$，$y_2=3$，则 $y_5=\dfrac{2}{3}$.

其中，所有正确结论的序号是____________.



三、解答题（共 14 分）

26．已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}ax^2-(a+1)x,(a\in R)$.

（1）当 $a=1$ 时，判断函数 $y=f(x)$ 的单调性；

（2）若关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2$ 有两个不同实根 x_1,x_2，求实数 a 的取值范围，并证明 $x_1\cdot x_2>e^2$.

参考答案

1．B

2．C

3．D

4．D

函数 $f(x)=x^3-3ax+2$ 的导数 $f'\left(x\right)=3x^2-3a$ ，

由题意得，$f'\left(2\right)=0$，即$12-3a=0$，$a=4$．

$f\left(x\right)=x^3-12x+2$，$f'\left(x\right)=3x^2-12=3\left(x-2\right)\left(x+2\right)$，

令 $f'\left(x\right)>0$，得 $x>2$ 或 $x<-2$； $f'\left(x\right)<0$，得$-2<x<2$，

所以当时 $x=-2$ 取极大值，即 $f\left(x\right)_{极大值}=f\left(-2\right)=-8+24+2=18$.

5．C

6．D

当 $n=k$ 时，有不等式$\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{k+k}\geq\dfrac{11}{24}$，

当 $n=k+1$ 时，不等式为$\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{2k+2}\geq\dfrac{11}{24}$，

将上面两式的左边相减可得，由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，不等式左边应添加的项是

$\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{2k+2}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}$.

7．A

8．B

由题意，数列$\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$用图象可知，

当$n\leq4$时，$a_n<0$；当$n\geq5$时，$a_n>0$，

所以$n\leq4$时，$a_nb_n>0$，所以$S_1<S_4$，可排除 A 项；由$a_5b_5<0$，所以$S_4>S_5$，可排除 D 项；

由$a_{11}b_{11}>0$，所以$S_{10}<S_{11}$，可排除 C 项；

当$11\leq n\leq13$时，$a_nb_n>0$，所以$S_{10}<S_{13}$，可得 B 项正确.

9．B

解：设高为h，底面半径为r，

则$\pi r^2h=27\pi$，即$r^2h=27$，

所用材料的面积是$S=2\pi rh+\pi r^2=2\pi\times\frac{27}{r}+\pi r^2=\pi(\frac{54}{r}+r^2)$，

则$S'=\pi\left(2r-\frac{54}{r^2}\right)$，令$S'=0$，得$2r=\frac{54}{r^2}$，解得：$r=3$，

且$r>3$时，$S'>0$，$0<r<3$时，$S'<0$，

即S在$0,3$上单调递减，在$\left(3,+\infty\right)$上单调递增，

故当$r=3$时S取得极小值，也是最小值,故当水桶底面半径为3时，用料最省．

10．B

对于选项A，$x_{pq}=px_q+qx_p\Leftrightarrow\frac{x_{pq}}{pq}=\frac{x_q}{q}+\frac{x_p}{p}$，取$x_n=n\ln n$，则易知数列$\{x_n\}$满足条件，故选项$A$可能成立．

对于选项B，$x_{p+q}=px_q+qx_p$，令$p=q=1$，则$x_2=2x_1$；令$p=2$，$q=1$，

得$x_3=2x_1+x_2=4x_1$；令$p=q=2$，得$x_4=4x_2=8x_1$；令$p=3$，$q=1$，

得$x_4=3x_1+x_3=7x_1$．所以$8x_1=7x_1$，即$x_1=0$，所以$x_n=0$与$\{x_n\}$是递增数列矛盾，故选项B不可能成立．

对于选项C，由$x_{pq}=x_p+x_q-1$得$x_{pq}-1=x_p-1+x_q-1$，取$x_n=\ln n+1$，则易知数列$\{x_n\}$满足条件，故选项C可能成立．

对于选项D，由$x_{p+q}=2x_px_q$，得$2x_{p+q}=2x_p\cdot 2x_q$，取$x_n=\frac{\mathrm{e}^n}{2}$，则易知数列$\{x_n\}$满足条件，故选项$D$可能成立．

11．$\frac{3}{2}$

12．答案不唯一，例如$a_n=n$，$b_n=pn+q$均可

13．1013

由数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，且满足$a_n+S_n=1$，

当$n\geq 2$时，$a_{n-1}+S_{n-1}=1$，

两式相减，可得$a_n-a_{n-1}+\left(S_n-S_{n-1}\right)=2a_n-a_{n-1}=0$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}(n\geq 2)$，

令$n=1$，可得$a_1+S_1=2a_1=1$，解得$a_1=\frac{1}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$表示首项为$\frac{1}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，所以$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

则$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以$\frac{S_n}{a_n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2^n-1$，

所以$\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_2}{a_2}+\frac{S_3}{a_3}+\cdots+\frac{S_9}{a_9}=\left(2+2^2+\cdots+2^9\right)-(1+1+\cdots+1)$

$=\frac{2\left(1-2^9\right)}{1-2}-9=2^{10}-11=1013$.

故答案为：1013．

14．①③

解：$y=x^3$的导数为$y'=3x^2$，可得切线方程为$y=0$，即x轴，

而$x>0$时，$y=x^3>0$，$x<0$时，$y=x^3<0$，∴直线l：$y=0$在点P（0，0）处“切过”曲线C：$y=x^3$，①正确；

由$\ln x$的导数为$\frac{1}{x}$，可得切线方程为$y-0=x-1$，

且$y=\ln x-(x-1)$的导数为$y'=\frac{1}{x}-1$，

当$x>1$时，函数y递减；$0<x<1$时，函数y递增，

可得$x=1$处$y=\ln x-x+1$的最大值为0，

则 $\ln x \le x-1$，

②直线 l：$y=x-1$ 在点 P（1，0）处“切过”曲线 C：$y=\ln x$ 不正确；

$y=\sin x$ 的导数为 $y'=\cos x$，

可得在点 P（π，0）处切线方程为 $y-x+\pi$，

由 $y=\sin x$ 和直线 $y=\pi-x$ 可得切线穿过曲线，

直线 l：$y=-x+\pi$ 在点 P（π，0）处“切过”曲线 C：$y=\sin x$，故③正确；

$y=e^x$ 的导数为 $y'=e^x$，可得在点 P（0，1）处切线为 $y=x+1$，

令 $y=e^x-x-1$，则 $y'=e^x-1$，$x<0$ 时，$y'<0$，$x>0$ 时，$y'>0$，即 $y=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，在 $(0,+\infty)$ 上递增，∴ $x=0$ 时，$y_{\min}=0$，即 $y=e^x-x-1\ge 0$，

直线 l：$y=-x+1$ 在点 P（0，1）处“切过”曲线 C：$y=e^x$ 不正确.

15．6　$\dfrac{(k+1)^n-kn-1}{k^2}$

①若数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，且 $a_1=\dfrac{1}{k}$，$k\ge 2, k\in N^*$，则 $a_n=\dfrac{1}{k}+n-1\in(n-1,n)$，所以 $b_n=[a_n]=n-1$，则 $T_4=0+1+2+3=6$；故填 6.

②若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $k+1$ 的等比数列，且 $a_1=\dfrac{1}{k}$，$k\ge 2, k\in N^*$，则

$b_n=\dfrac{1}{k}(1+k)^{n-1}-\dfrac{1}{k}$　　$T_n=\dfrac{1}{k^2}[(1+k)^n-nk-1]$

16．(1) $a_n=n$；（2）$T_n=2^{n+1}-2$.

解:(1)设等差数列的公差为 d，则 $\begin{cases} a_5=a_1+4d=5 \\ S_5=5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}d=15 \end{cases}$，解之得 $\begin{cases} a_1=1 \\ d=1 \end{cases}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=1+1\times(n-1)=n$；……………………5 分

（2）$\because a_n=\log_2 b_n=n, \therefore b_n=2^{a_n}=2^n$，由此可得 $b_1=2^1=2.\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}=2$，数列 $\{b_n\}$ 的是首项为 2,公比为 2 的等比数列.因此，可得 $\{b_n\}$ 前 n 项和 $T_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.…………………10 分

17.

①根据题意，最初患者自己被感染，即第 1 天人数为 1，

第 2 天被感染人数增至为：$1+1\cdot kp=1+kp$；

第 3 天被感染人数增至为：$\left(1+kp\right)+\left(1+kp\right)kp=\left(1+kp\right)^2$，…，

显然第 $n-1$ 天被感染人数增至为：$\left(1+kp\right)^{n-2}$，第 n 天被感染人数增至为：$\left(1+kp\right)^{n-1}$，

于是根据题意中均值定义，第 n 天新增加人数的数学期望 $E_n=\left(1+kp\right)^{n-1}-\left(1+kp\right)^{n-2}$，

即 $E_n=kp\left(1+kp\right)^{n-2}$，于是 $E_8=10\times\frac{1}{2}\left(1+10\times\frac{1}{2}\right)^6=5\times6^6=233280$．……………………4 分

②根据题意函数 $p'=f\left(p\right)=\ln\left(1+p\right)-\frac{2}{3}p$，求导得：$f'\left(p\right)=\frac{1}{1+p}-\frac{2}{3}=\frac{1-2p}{3\left(1+p\right)}$，

当且仅当 $p\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$f'\left(p\right)>0$，此时 $p'=f\left(p\right)$单调递增；当 $p\in\left[\frac{1}{2},1\right)$时，$f'\left(p\right)\le0$，

即 $p'=f\left(p\right)$单调递减，于是 $p'=f\left(p\right)_{\max}\le p\left(\frac{1}{2}\right)=\ln3-\ln2-\frac{1}{3}\approx0.1$．

此时 $p=\frac{1}{2}$，$p'=0.1$，

于是 $E_6=10\times\frac{1}{2}\left(1+10\times\frac{1}{2}\right)^{6-2}=5\times6^4=6480$（人），

$E_6{}'=10\times\frac{1}{10}\left(1+10\times\frac{1}{10}\right)^{6-2}=2^4=16$（人）．

经过计算得知，戴口罩情况下患者与密切接触的关联者接触被感染的人数为 16 人，

而不戴口罩的情况下患者与密切接触的关联者接触被感染的人数为 6480 人，

即 E_6 远大于 $E_6{}'$，于是戴口罩是非常必要的．……………………………………8 分

原因：实际上有更多的防疫措施；病人体内病毒的传染性可能会降低；实际密切接触的人数可能较少等等。…………………………………………………………………………10 分

18．(1)y=0 ……………………………………………………………………2 分

（2） $f(x)=\ln(1+x)-mx$ 的定义域为$(-1,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-m(x>-1)$，……………………………………3 分

当$m\le 0$时，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-m>0$恒成立，…………………………4 分

此时 $f(x)$ 在$(-1,+\infty)$单调递增，无极大值和极小值，…………………………5 分

当$m>0$时，$\dfrac{1}{m}-1>-1$，由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-m>0$可得：$-1<x<\dfrac{1}{m}-1$，

由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-m<0$可得$x>\dfrac{1}{m}-1$，

此时 $f(x)$ 在$\left(-1,\dfrac{1}{m}-1\right)$单调递增，在$\left(\dfrac{1}{m}-1,+\infty\right)$单调递减，

所以 $f(x)$ 的极大值为$f\left(\dfrac{1}{m}-1\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{m}-1\right)-m\times\left(\dfrac{1}{m}-1\right)=m-1-\ln m$，无极小值.………………6 分

（3）由（2）可知，当$m\le 0$时，$f(x)$ 在$(-1,+\infty)$单调递增，所以 $f(x)$ 在$\left[0,e^2-1\right]$单调递增，不可能有两个零点，

当$m>0$时，$f(x)$ 的极大值为$f\left(\dfrac{1}{m}-1\right)=m-1-\ln m$，

因为$f(0)=0$，所以$x=0$是 $f(x)$ 的一个零点，

若函数 $f(x)$ 在区间$\left[0,e^2-1\right]$上恰有两个零点，则$\begin{cases} f\left(e^2-1\right)\le 0 \\ 0<\dfrac{1}{m}-1<e^2-1 \end{cases}$，………………8 分

即$\begin{cases} 2-m\left(e^2-1\right)\le 0 \\ \dfrac{1}{e^2}<m<1 \end{cases}$，可得：$\dfrac{2}{e^2-1}\le m<1$，

所以 m 的取值范围为$\dfrac{2}{e^2-1}\le m<1$.……………………10 分

19.（1）因为$T\left(A_4\right)=1$， 故x_1,x_2,x_3,x_4只有一个逆序对，

则不同的A_4分别为：$1,2,4,3;1,3,2,4;2,1,3,4$.……………………………………3 分

（2）因为$T\left(A_4\right)=2$，故数列A_n：x_1，x_2，…，x_n有两种情况：

①2 对逆序数由连续 3 个元素提供，即

例如 123 可以变成 312 和 231，共$2(n-2)$种

②2 对逆序数由两对 2 个元素提供，即

第一对取 12，第二对取 34,45,56……共$n-3$种

第一对取 23，第二对去 45,56,67……共$n-2$种

以此类推，共$\dfrac{(n-3)(n-2)}{2}$种

综上，共有$\dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$种…………………………………………………………6 分

（3）对任意的A_n：x_1，x_2，…，x_n，其逆序对的个数为$T\left(A_n\right)$，

我们引进一个定义：$1\le i<j\le n$，有$x_i<x_j$，则称$\left(x_i,x_j\right)$为数列A_n的一个顺序对，

则A_n中的顺序对个数为$\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}-T\left(A_n\right)$.

考虑A_n：x_1，x_2，…，x_n与B_n：x_n，x_{n-1}，…，x_1，

A_n中的逆序对的个数为B_n中顺序对的个数，A_n中顺序对的个数为B_n中逆序对个数，

把所有的A_n按如上形式两两分类，则可得所有的A_n中，逆序对的总数和顺序对的总数相等，而它们的和为$\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}\times n!$，故逆序对的个数为$\dfrac{n\left(n-1\right)}{4}\times n!$，

所以所有$T\left(A_n\right)$的算术平均值为$\dfrac{n\left(n-1\right)}{4}$.………………………………………10 分

20．C

21．B

设 $f\left(x\right)=e^{x-a}-\ln x-a,\left(x>0\right)$，则 $f\left(x\right)=e^{x-a}-\ln x-a\geq 0$ 恒成立，

由 $f'\left(x\right)=e^{x-a}-\dfrac{1}{x}$，令 $h\left(x\right)=e^{x-a}-\dfrac{1}{x}$，则 $h'\left(x\right)=e^{x-a}+\dfrac{1}{x^2}>0$ 恒成立，

所以 $h\left(x\right)=e^{x-a}-\dfrac{1}{x},\left(x>0\right)$ 为增函数，令 $e^{x-a}-\dfrac{1}{x}=0$ 得 $x=x_0,\left(x>0\right)$，

当 $0<x<x_0$ 时，$h\left(x\right)<0$，当 $x_0<x$ 时，$h\left(x\right)>0$；

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 递增，故 $f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值，

故最小值 $f\left(x_0\right)=e^{x_0-a}-\ln x_0-a\geq 0$，因为 $e^{x_0-a}=\dfrac{1}{x_0}$，则 $x_0-a=-\ln x_0$

所以 $\dfrac{1}{x_0}+x_0-a-a\geq 0$ 恒成立，得 $2a\leq\dfrac{1}{x_0}+x_0$，又因为 $2\leq\dfrac{1}{x_0}+x_0$（当且仅当 $x_0=1$ 时等号成立）；所以 $2a\leqslant 2$ 即 $a\leq 1$ ．

22．D

对于选项 A：定义域为 R，

$y=f\left(x\right)=\sinh x\cosh x=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}$，而 $f\left(-x\right)=\dfrac{e^{-2x}-e^{2x}}{2}=-f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 是奇函数，所以 A 错误；

对于选项 B：$\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$

$=\dfrac{e^{x+y}+e^{-x-y}+e^{x-y}+e^{y-x}}{4}-\dfrac{e^{x+y}+e^{-x-y}-e^{x-y}-e^{y-x}}{4}=\dfrac{e^{x-y}+e^{y-x}}{2}=\cosh\left(x-y\right)$，所以 B 错误；

对于选项 C、D：设 $A\left(m,\dfrac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$，$B\left(m,\dfrac{e^m-e^{-m}}{2}\right)$，

$\left(\cosh x\right)'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},\left(\sinh x\right)'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，

则曲线C_1在点A处的切线方程为：$y-\frac{e^m+e^{-m}}{2}=\frac{e^m-e^{-m}}{2}\left(x-m\right)$，

曲线C_2在点B处的切线方程为：$y-\frac{e^m-e^{-m}}{2}=\frac{e^m+e^{-m}}{2}\left(x-m\right)$，

联立求得点P的坐标为$\left(m+1,e^m\right)$，则$\left|BP\right|^2=1+\left(e^m-\frac{e^m-e^{-m}}{2}\right)^2=1+\frac{\left(e^m+e^{-m}\right)^2}{4}$，

$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\left|AB\right|=\frac{1}{2}e^{-m}$，所以$\left|BP\right|$随$m$的增大而先减小后增大，$\triangle PAB$的面积随$m$的增大而减小，所以C错误，D正确.

23．t_3

24．$\ln\left(e-1\right)$

$g\left(x\right)=e^x$，则$g'\left(x\right)=e^x$，所以$g'\left(\xi\right)=e^{\xi}$，

由拉格朗日中值的定义可知，$g'\left(\xi\right)=\frac{g\left(1\right)-g\left(0\right)}{1-0}=e-1$，

即$e^{\xi}=e-1$，所以$\xi=\ln\left(e-1\right)$.

25．①②③.

由题意知，$B_{n-1}\left(y_{n-1}^2,y_{n-1}\right)$，$B_{n-2}\left(y_{n-2}^2,y_{n-2}\right)$，

直线$B_{n-1}B_{n-2}$的斜率为$\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{y_{n-1}^2-y_{n-2}^2}=\frac{1}{y_{n-1}+y_{n-2}}$，

则直线$B_{n-1}B_{n-2}$的方程为$y-y_{n-1}=\frac{1}{y_{n-1}+y_{n-2}}\left(x-y_{n-1}^2\right)$，

令$x=0$，则$y-y_{n-1}=\frac{-y_{n-1}^2}{y_{n-1}+y_{n-2}}$，$\therefore y=\frac{y_{n-1}y_{n-2}}{y_{n-1}+y_{n-2}}$，即$y_n=\frac{y_{n-1}y_{n-2}}{y_{n-1}+y_{n-2}}$，

在等式$y_n=\frac{y_{n-1}y_{n-2}}{y_{n-1}+y_{n-2}}$两边取倒数得$\frac{1}{y_n}=\frac{1}{y_{n-1}}+\frac{1}{y_{n-2}}$.

$\because y_1>0$，$y_2>0$，由此可得出$y_3>0$，$y_4>0$，$\cdots$，命题②正确；

$\because \frac{1}{y_n}-\frac{1}{y_{n-1}}=\frac{1}{y_{n-2}}>0$，则 $\frac{1}{y_n}>\frac{1}{y_{n-1}}$，由②知，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$y_n>0$，

$\therefore y_n<y_{n-1}$，即数列 $\{y_n\}$ 是单调递减数列，命题①正确；

若 $y_1=4$，$y_2=3$，则 $y_3=\frac{12}{7}$，$y_4=\frac{12}{11}$，$y_3=\frac{2}{3}$，命题③正确.

26．

（1）$a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x(x>0)$，

故 $f'(x)=\frac{1}{x}+x-2=\frac{x^2-2x+1}{x^2}\geq 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．…………………………………………………………4 分

（2）由题意可知 $\ln x=(a+1)x$ 有两解，

设直线 $y=kx$ 与 $y=\ln x$ 相切，切点坐标为 $\left(x_0,y_0\right)$，

则 $\begin{cases} y_0=kx_0 \\ y_0=\ln x_0 \\ k=\frac{1}{x_0} \end{cases}$，解得 $x_0=e,\quad y_0=1,\quad k=\frac{1}{e}$，

$\therefore 0<a+1<\frac{1}{e}$，即 $-1<a<\frac{1}{e}-1$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left(-1,\frac{1}{e}-1\right)$．…………………………………………………6 分

不妨设 $x_2>x_1>0$，则 $\ln x_1=(a+1)x_1,\quad \ln x_2=(a+1)x_2$，

两式相加得：$\ln\left(x_1x_2\right)=(a+1)\left(x_1+x_2\right)$，

两式相减得：$\ln\frac{x_2}{x_1}=(a+1)\left(x_2-x_1\right)$，

$\therefore \frac{\ln\left(x_1x_2\right)}{\ln\frac{x_2}{x_1}}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}$，故 $\ln\left(x_1x_2\right)=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\cdot\ln\frac{x_2}{x_1}$，

要证 $x_1x_2>e^2$，只需证 $\dfrac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\cdot\ln\dfrac{x_2}{x_1}>2$，……………………………………8 分

即证 $\ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{2\left(x_2-x_1\right)}{x_1+x_2}=\dfrac{2\left(\dfrac{x_2}{x_1}-1\right)}{1+\dfrac{x_2}{x_1}}$，……………………………………10 分

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，故只需证 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{1+t}$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立即可.

令 $g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{1+t}(t>1)$，

则 $g^{'}(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，……………………………………12 分

$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(t)>g(1)=0$，

即 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{1+t}$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立.

$\therefore x_1\cdot x_2>e^2$. ……………………………………………………………………14 分