

2020-2021 学年北京市高三定位考试

数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) A (2) D (3) D (4) B (5) C
(6) C (7) B (8) C (9) D (10) A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) $(-\infty, 0]$ (12) 2 $(2\sqrt{2}, 0)$
(13) 1 (14) 2π 1（答案不唯一）
(15) ①③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16)（共 14 分）

解：选条件①： $a = 4$ ， $c = 6$

（ I ）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ ，3 分

$$\text{且 } \cos C = -\frac{1}{8}, \quad a = 4, \quad c = 6$$

$$\text{所以 } 36 = 16 + b^2 - 8b(-\frac{1}{8})$$

所以 $b = 4$ ， $b = -5$ （舍）.5 分

$$\text{由正弦定理得 } \sin B = \frac{b \sin C}{c}. \quad \text{.....8 分}$$

$$\text{因为 } \cos C = -\frac{1}{8}, \quad C \in (0, \pi)$$

$$\text{所以 } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{3\sqrt{7}}{8}. \quad \text{.....9 分}$$

$$\text{所以 } \sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}. \quad \text{.....10 分}$$

（ II ）因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$ 13 分

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中， } a = 4, \quad b = 4, \quad \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{7}. \quad \text{.....14 分}$$

选条件②: $a = 4$, $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(I) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\cos C = -\frac{1}{8}$,

所以 C 为钝角.

因为 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,

所以 C 为顶角.

所以 $a = b = 4$2 分

因为 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,5 分

所以 $c = 6$.

由正弦定理得 $\sin B = \frac{b \sin C}{c}$8 分

因为 $\cos C = -\frac{1}{8}$, $C \in (0, \pi)$

所以 $\sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$9 分

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$10 分

(II) 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$ 13 分

在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4$, $b = 4$, $\sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

所以 $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{7}$14 分

(17) (共 14 分)

解: (I) 连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 EO .

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体,

所以 $ABCD$ 为矩形.

所以点 O 为 BD 中点.

又因为 E 为 DD_1 中点,

所以在 $\triangle BD_1D$ 中, $OE \parallel BD_1$2 分

又 $OE \subset$ 平面 ACE , $BD_1 \not\subset$ 平面 ACE ,4 分

所以 $BD_1 \parallel$ 平面 ACE5 分

(II) 以 D 为坐标原点, 分别以 DA, DC, DD_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系.6 分

则 $A(1, 0, 0), C(0, 1, 0), E(0, 0, 1), B_1(1, 1, 2)$,

所以 $\overrightarrow{EB_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{EA} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{EC} = (0, 1, -1)$.

$$\text{所以} \begin{cases} \overrightarrow{EB_1} \cdot \overrightarrow{EA} = 0, \\ \overrightarrow{EB_1} \cdot \overrightarrow{EC} = 0. \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} EB_1 \perp EA, \\ EB_1 \perp EC. \end{cases}$$

又 $EA \cap EC = E$,8 分

所以 $EB_1 \perp$ 平面 ACE9 分

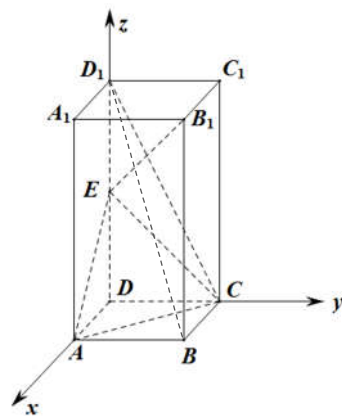
(III) 因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体,

所以 $BC \perp$ 平面 DCC_1D_1

所以取平面 ECC_1 的法向量为 $\overrightarrow{BC} = (-1, 0, 0)$,11 分

再由 (II), 取平面 ACE 的法向量为 $\overrightarrow{EB_1} = (1, 1, 1)$12 分

$$\text{所以} \cos \langle \overrightarrow{EB_1}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{EB_1} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{EB_1}| |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



由题知二面角 $A-CE-C_1$ 为钝角，所以其余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$14 分

(18) (共 14 分)

解: (I) 设事件 A 为 “这位顾客两种手机都选择分 4 期付款”.1 分

故 $P(A) = 0.1 \times 0.4 = 0.04$4 分

(II) X 的所有可能值为 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900.5 分

$$P(X = 600) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

$$P(X = 650) = C_2^1 \times 0.4 \times 0.1 = 0.08$$

$$P(X = 700) = 0.1 \times 0.1 + C_2^1 \times 0.4 \times 0.1 = 0.09$$

$$P(X = 750) = C_2^1 \times 0.4 \times 0.4 + C_2^1 \times 0.1 \times 0.1 = 0.34$$

$$P(X = 800) = 0.1 \times 0.1 + C_2^1 \times 0.1 \times 0.4 = 0.09$$

$$P(X = 850) = C_2^1 \times 0.1 \times 0.4 = 0.08$$

$$P(X = 900) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

所以 X 的分布列为

X	600	650	700	750	800	850	900
P	0.16	0.08	0.09	0.34	0.09	0.08	0.16

.....11 分

(III) $D(x_1) < D(x_2)$14 分

(19) (共 14 分)

解: (I) 因为 $f(x) = (x+1)\ln x - ax + a$,

所以 $f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - a$2 分

$$f'(1) = 2 - a.$$

由题设知 $f'(1) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$,

即 $2 - a = 1$, 解得 $a = 1$5 分

(II) 设 $g(x) = f'(x)$.

所以 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$7 分

令 $g'(x) = 0, x = 1$.

因为当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(1) = 2 - a$,

即 $f'(x)$ 的最小值为 $f'(1) = 2 - a$9 分

因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) \geq 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 成立.

所以 $2 - a \geq 0$.

所以 a 的最大值为 2.11 分

(III) 当 $a \leq 2$ 时, $f(x)$ 只有 1 个零点.12 分

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 有 3 个零点.14 分

(20) (共 14 分)

解: (I) 因为椭圆方程 $C: \frac{x^2}{6} + y^2 = 1$,

所以 $a^2 = 6, b^2 = 1$1 分

所以 $c^2 = 5$2 分

所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$4 分

(II) (i) 设 $P(x_1, y_1), Q(-x_1, -y_1)$ $x_1 \neq \pm\sqrt{6}$.

由题设知, $M(\sqrt{6}, 0)$5 分

因为 $PQ \perp PM$,

所以点 $P(x_1, y_1)$ 在以线段 OM 为直径的圆上,

所以有 $(x_1 - \frac{\sqrt{6}}{2})^2 + y_1^2 = (\frac{\sqrt{6}}{2})^2$6 分

又 $\frac{x_1^2}{6} + y_1^2 = 1$7 分

解得 $x_1 = \frac{\sqrt{6}}{5}, x_1 = \sqrt{6}$ (舍).

所以 $x_1^2 = \frac{6}{25}, y_1^2 = \frac{24}{25}$9 分

所以 $PQ = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{\sqrt{120}}{5} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$.

又 $PM = \sqrt{(x_1 - \sqrt{6})^2 + y_1^2} = \frac{\sqrt{120}}{5} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$10 分

所以 $PQ = PM$, 即 $\triangle PQM$ 为等腰三角形.

(ii) 法 1: 设 $M(x_2, y_2)$, 且 $x_2 \neq \pm x_1, x_1 \neq \pm\sqrt{6}, x_1 \neq 0$.

记直线 PQ, PM, QM 的斜率分别为 k_{PQ}, k_{PM}, k_{QM} .

所以 $k_{PQ} = \frac{y_1}{x_1}, k_{PM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, k_{QM} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$11 分

因为 $PQ \perp PM$,

所以 $k_{PQ} \cdot k_{PM} = -1$12 分

又 $k_{PM} \cdot k_{QM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2}$.

$$\text{因为} \begin{cases} \frac{x_1^2}{6} + y_1^2 = 1, \\ \frac{x_2^2}{6} + y_2^2 = 1, \end{cases}$$

$$\text{所以} \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = -\frac{1}{6}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{所以} k_{PM} \cdot k_{QM} = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{所以} \frac{k_{PQ}}{k_{QM}} = 6, \text{ 即直线 } PQ \text{ 和直线 } QM \text{ 的斜率之比为 } 6. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

(ii) 法 2: 因为点 P 不是椭圆 C 的顶点,
所以直线 PQ, PM, QM 的斜率都存在且不为 0,

设直线 PM 的方程为 $y = kx + m (km \neq 0)$

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{6} + y^2 = 1 \end{cases} \text{得} (1 + 6k^2)x^2 + 12kmx + 6m^2 - 6 = 0$$

$$\text{由} \Delta > 0, \text{ 所以 } 6k^2 + 1 - m^2 > 0.$$

设 $P(x_1, y_1), M(x_2, y_2), PM$ 的中点 $T(x_0, y_0)$.

$$\text{因为 } x_1 + x_2 = \frac{-12km}{1 + 6k^2}, \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-6km}{1 + 6k^2}$$

$$y_0 = kx_0 + m = \frac{m}{1 + 6k^2}, \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

因为 $OT \parallel QM$,

$$\text{所以 } k_{QM} = k_{OT} = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{6k}$$

又因为 $PQ \perp QM$,

$$\text{所以 } k_{PQ} = -\frac{1}{k}.$$

$$\text{所以 } \frac{k_{PQ}}{k_{QM}} = \frac{-\frac{1}{k}}{-\frac{1}{6k}} = 6. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

(21) (共 15 分)

解: (I) ①不可以; ②可以. \dots\dots\dots 4 分

(II) 因为 $a_k = k = |x_k - x_{k-1}| \leq m_0 - 1$,

所以 $k \leq m_0 - 1$6 分

$$\text{当 } m_0 \text{ 为奇数时, 取 } x_i = \begin{cases} \frac{m-i+1}{2}, i \in [0, m-1] \text{ 且 } i \text{ 为偶数,} \\ \frac{m+i+2}{2}, i \in [0, m-1] \text{ 且 } i \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

$$\text{当 } m_0 \text{ 为偶数时, 取 } x_i = \begin{cases} \frac{m+i+2}{2}, i \in [0, m-1] \text{ 且 } i \text{ 为偶数,} \\ \frac{m-i+1}{2}, i \in [0, m-1] \text{ 且 } i \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

此时 k 可取 $m_0 - 1$, 所以 $k_{\max} = m_0 - 1$10 分

(III) 设数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ 满足 $a_i \in [0, 1] (i = 1, 2, \dots, 2021)$,

构造数列 $x_0, x_1, \dots, x_{2021}$ 如下:

$$x_0 = 0, x_1 = a_1, \quad x_{i+1} = \begin{cases} x_i + a_{i+1}, & x_i \leq 1, \\ x_i - a_{i+1}, & x_i > 1, \end{cases} \quad \text{其中 } i = 1, 2, \dots, 2020.$$

根据 x_{i+1} 的定义知道,

当 $x_i \leq 1$ 时, 因为 $a_{i+1} \in [0, 1]$, 所以 $x_{i+1} \in [0, 2]$.

当 $x_i > 1$ 时, 因为 $a_{i+1} \in [0, 1]$, 所以 $x_{i+1} \in [0, 2]$.

$$\text{而 } |x_{i+1} - x_i| = \begin{cases} |x_i + a_{i+1} - x_i|, & x_i \leq 1, \\ |x_i - a_{i+1} - x_i|, & x_i > 1, \end{cases}$$

$$\text{所以 } |x_{i+1} - x_i| = \begin{cases} a_{i+1}, & x_i \leq 1, \\ a_{i+1}, & x_i > 1, \end{cases}$$

所以任取数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ 满足 $a_i \in [0, 1] (i = 1, 2, \dots, 2021)$, 均可以“嵌入”区间 $[0, 2]$.