

2020-2021 学年北京市高三定位考试

本试卷共 5 页, 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x | x(2-x) \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$

(A) $\{1, 2\}$

(B) $\{1, 3\}$

(C) $\{2, 3\}$

(D) $\{1, 2, 3\}$

(2) 已知 $a = \log_3 2$, $b = 2^{0.1}$, $c = 3^{\frac{1}{2}}$, 则

(A) $a > b > c$

(B) $b > a > c$

(C) $b > c > a$

(D) $c > b > a$

(3) 在复平面内, 复数 $z = \sin \theta + i \cos \theta$ 对应的点位于第二象限, 则角 θ 的终边在

(A) 第一象限

(B) 第二象限

(C) 第三象限

(D) 第四象限

(4) 在 $(x - \sqrt{2})^4$ 的展开式中, x^2 的系数为

(A) 6

(B) 12

(C) 24

(D) 48

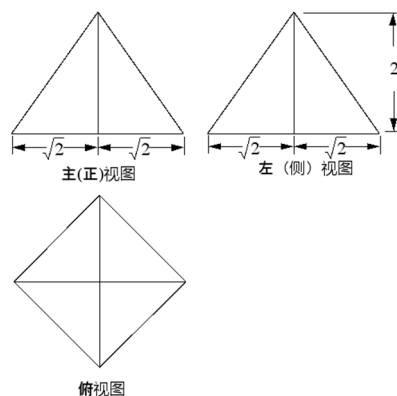
(5) 某四棱锥的三视图如图所示, 该四棱锥的最长棱为

(A) 2

(B) $2\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{6}$

(D) 4



(6) 已知函数 $f(x) = |x-1| + a|x+1|$, 则 “ $a = -1$ ” 是 “ $f(x)$ 为奇函数” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 已知直线 $l: ax + by - 3 = 0$ 经过点 $(a, b-2)$, 则原点到点 $P(a, b)$ 的距离可以是

- (A) 4 (B) 2
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

(8) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = -5$, $a_3 = -1$. 记 $b_n = \frac{S_n}{a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则数列

$\{b_n\}$ 的

- (A) 最小项为 b_3 (B) 最大项为 b_3
(C) 最小项为 b_4 (D) 最大项为 b_4

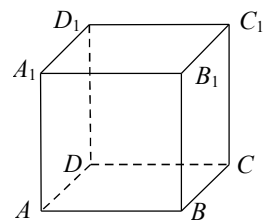
(9) 抛物线 $W: y^2 = 8x$ 的焦点为 F . 对于 W 上一点 P , 若 W 的准线上只存在一个点 Q , 使得

$\triangle FPQ$ 为等腰三角形, 则点 P 的横坐标为

- (A) 2 (B) 4
(C) 5 (D) 6

(10) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在正方形 ADD_1A_1 内, 且不在棱上, 则

- (A) 在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q , 使得 $PQ \parallel AC$
(B) 在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q , 使得 $PQ \perp AC$
(C) 在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q , 使得平面 $PQC_1 \parallel$ 平面 ABC
(D) 在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q , 使得 $AC \perp$ 平面 PQC_1



第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 函数 $f(x) = \sqrt{1-2^x}$ 的定义域为_____.

(12) 已知双曲线 $W: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ (其中 $a > 0$) 的渐近线方程为 $y = \pm x$, 则 $a =$ _____, W 的右焦点坐标为_____.

(13) 已知平面向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$ 与 $\mathbf{b} = (3, x)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 $x =$ _____.

(14) 已知函数 $f(x) = \sin 2x$. 若非零实数 a, b , 使得 $f(x+a) = bf(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 则满足条件的一组值可以是 $a =$ _____, $b =$ _____. (只需写出一组)

(15) 已知曲线 $W_1: x^2 + y^2 = m^2$, $W_2: x^4 + y^2 = m^2$, 其中 $m > 0$.

① 当 $m=1$ 时, 曲线 W_1 与 W_2 有 4 个公共点;

② 当 $0 < m < 1$ 时, 曲线 W_1 围成的区域面积大于曲线 W_2 围成的区域面积;

③ $\exists m > 1$, 曲线 W_1 围成的区域面积等于 W_2 围成的区域面积;

④ $\forall m > 0$, 曲线 W_1 围成的区域内整点 (即横、纵坐标均为整数的点) 个数不少于曲线 W_2 围成的区域内整点个数.

其中, 所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(16) (本小题 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = -\frac{1}{8}$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个 作为已知, 求:

(I) $\sin B$ 的值;

(II) $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $a = 4$, $c = 6$;

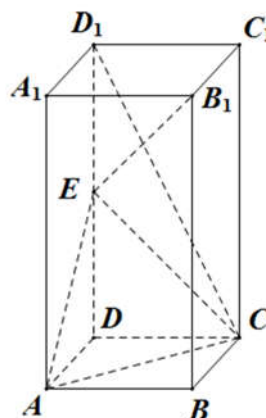
条件②: $a = 4$, $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

(17) (本小题共 14 分)

如图，长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = AD = 1$ ，

$AA_1 = 2$ ，点 E 为 DD_1 的中点.



(I) 求证: $BD_1 \parallel$ 平面 ACE ;

(II) 求证: $EB_1 \perp$ 平面 ACE ;

(III) 求二面角 $A - CE - C_1$ 的余弦值.

(18) (本小题 14 分)

某电商平台联合手机厂家共同推出“分期购”服务，付款方式分为四个档次：1 期、2 期、3 期和 4 期. 记随机变量 x_1 、 x_2 分别表示顾客购买 H 型手机和 V 型手机的分期付款期数，根据以往销售数据统计， x_1 和 x_2 的分布列如下表所示：

x_1	1	2	3	4
P	0.1	0.4	0.4	0.1
x_2	1	2	3	4
P	0.4	0.1	0.1	0.4

(I) 若某位顾客购买 H 型和 V 手机各一部，求这位顾客两种手机都选择分 4 期付款的概率；

(II) 电商平台销售一部 V 型手机，若顾客选择分 1 期付款，则电商平台获得的利润为 300 元；

若顾客选择分 2 期付款，则电商平台获得的利润为 350 元；若顾客选择分 3 期付款，则电商平台获得的利润为 400 元；若顾客选择分 4 期付款，则电商平台获得的利润为 450 元. 记电商平台销售两部 V 型手机所获得的利润为 X (单位:元)，求 X 的分布列；

(III) 比较 $D(x_1)$ 与 $D(x_2)$ 的大小. (只需写出结论)

(19) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - ax + a$.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 求 a 的值;

(II) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的最大值;

(III) 请直接写出 $f(x)$ 的零点个数.

(20) (本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + y^2 = 1$.

(I) 求椭圆 C 的离心率;

(II) 经过原点的直线与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 直线 PM 与直线 PQ 垂直, 且与椭圆 C 的另一个交点为 M .

(i) 当点 M 为椭圆 C 的右顶点时, 求证: $\triangle PQM$ 为等腰三角形;

(ii) 当点 P 不是椭圆 C 的顶点时, 求直线 PQ 和直线 QM 的斜率之比.

(21) (本小题 15 分)

对于给定的区间 $[m, t]$ 和非负数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_k$, 若存在 $x_0, x_1, \dots, x_k$, 使 $|x_i - x_{i-1}| = a_i$,

$i = 1, 2, \dots, k$ 成立, 其中 $x_i \in [m, t]$, $i = 0, 1, \dots, k$, 则称数列 A 可“嵌入”区间 $[m, t]$.

(I) 分别指出下列数列是否可“嵌入”区间 $[0, 2]$;

① $A_1: 2, 3$; ② $A_2: 1, 0, 1$.

(II) 已知数列 A 满足 $a_n = n (n = 1, 2, \dots, k)$, 若数列 A 可“嵌入”区间 $[1, m_0]$ ($m_0 \in \mathbf{N}^*$), 求数列 A 的项数 k 的最大值;

(III) 求证: 任取数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ 满足 $a_i \in [0, 1] (i = 1, 2, \dots, 2021)$, 均可以“嵌入”区间 $[0, 2]$.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)