

云贵川桂四省 2021 届高三联合考试

数学参考答案(理科)

1. D 【解析】本题考查集合的运算,考查运算求解能力.

因为 $A = \{x | 0 < x + 2 < 5\} = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | x^2 \leq 4\} = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$,
所以 $A \cap B = \{x | -2 < x \leq 2\}$.

2. C 【解析】本题考查平面向量的坐标运算,考查运算求解能力.

因为 $2m + n = (3\lambda + 4, 4)$, $m - n = (-1, -1)$, 且 $(2m + n) \perp (m - n)$, 所以 $(-1) \cdot (3\lambda + 4) + 4 \times (-1) = 0$, 解得 $\lambda = -\frac{8}{3}$.

3. A 【解析】本题考查充分条件、必要条件,考查逻辑推理能力.

由 $\lg a < \lg 3$, 得到 $0 < a < 3$, 因此, “ $1 < a < 3$ ”是“ $\lg a < \lg 3$ ”的充分不必要条件.

4. D 【解析】本题考查圆柱与圆锥的侧面积,考查空间想象能力.

设圆锥的母线为 l , 底面半径为 r , 高为 h , 则 $\pi r l = 4\pi$, $r = 1$, 所以 $h = \sqrt{4^2 - 1} = \sqrt{15}$.

圆柱体的侧面积为 $2\pi r \cdot 2h = 4\sqrt{15}\pi$, 所以制作这样一个粮仓的用料面积为 $(4\sqrt{15} + 4)\pi$.

5. B 【解析】本题考查等差数列的性质,考查运算求解能力.

数列 $\{a_n + b_n + c_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $a_{2020} + b_{2020} + c_{2020} = 1 + 2019 \times 2 = 4039$.

6. A 【解析】本题考查指数运算以及基本不等式,考查运算求解能力.

由 $\sqrt[m]{4} \times \sqrt[n]{8} = 2$ 可得 $2^{\frac{2}{m} + \frac{3}{n}} = 2$, 所以 $\frac{2}{m} + \frac{3}{n} = 1$, $3m + 2n = (3m + 2n)(\frac{2}{m} + \frac{3}{n}) = 6 + 6 + \frac{4n}{m} + \frac{9m}{n} \geq 12 + 2\sqrt{36} = 24$, 当且仅当 $m = 4, n = 6$ 时取等号.

7. D 【解析】本题考查函数的图象,考查数形结合的数学思想.

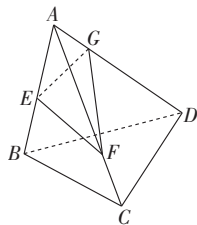
因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = [3(-x) - (-x)^3] \cdot \sin(-x) = (3x - x^3) \cdot \sin x = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数, 排除 B. 由 $f(x) = x(3 - x^2) \sin x$, 可知当 $x \in (0, \sqrt{3})$ 时, $f(x) > 0$; 当 $x \in (\sqrt{3}, \pi)$ 时, $f(x) < 0$. 故选 D.

8. C 【解析】本题考查三视图的应用,考查空间想象能力.

选项 C 的侧视图、正视图、俯视图恰好对应木板上的三个孔洞, 故选 C.

9. C 【解析】本题考查四面体的体积,考查空间想象能力.

如图, 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 点 D 到平面 ABC 的距离为 h , 则 $V_{ABCD} = \frac{1}{3}Sh$, 且 $S_{\triangle AEF} = S \cdot \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}S$. 点 G 到平面 ABC 的距离为 $\frac{1}{4}h$, 于是 $V_{AEFG} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}S \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{30}Sh$, 四面体 $ABCD$ 被截面 EFG 分得的上下两部分的体积之比为 $\frac{1}{30}Sh : (\frac{1}{3}Sh - \frac{1}{30}Sh) = 1 : 9$.



10. A 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

$\because OA_1 = A_1A_2 = 1$, 且 $\triangle OA_1A_2$ 是直角三角形, $\therefore OA_2 = \sqrt{2}$, 同理得 $OA_6 = \sqrt{6}$, $OA_7 = \sqrt{7}$, $\therefore \sin \angle A_6OA_8 = \sin(\angle A_6OA_7 + \angle A_7OA_8) = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \times \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{7\sqrt{2} + 2\sqrt{21}}{28}$.

11. B 【解析】本题考查导数的应用,考查逻辑推理能力.

由 $f(1-2x)=f(2x-1)$, 可知 $f(x)$ 为偶函数,

构造新函数 $g(x)=xf(x)$, 则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$, 当 $x>0$ 时 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)=xf(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(2)=0$, 即 $g(2)=0$.

所以由 $g(x)=xf(x)>0$ 可得 $x>2$, 此时 $f(x)>0$.

又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)>0$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的解集为 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

12. A 【解析】本题考查基本不等式的应用, 考查逻辑推理能力.

因为 $\frac{a^2+b^2+1+2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2+1}{a+b} = a+b+\frac{1}{a+b} \geq 2$, $2\sin C \leq 2$, 所以当且仅当 $a+b=1$, $\sin C=1$ 时, $2\sin C = \frac{a^2+b^2+1+2ab}{a+b}$. 又因为 $\frac{a^2+b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2$, 所以 $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$, 则 $c^2 \geq \frac{1}{2}$, $\triangle ABC$ 外接圆的面积为 $\pi(\frac{c}{2})^2 \geq \frac{\pi}{8}$.

13. $(-\infty, \sqrt{2})$ 【解析】本题考查函数的性质, 考查运算求解能力.

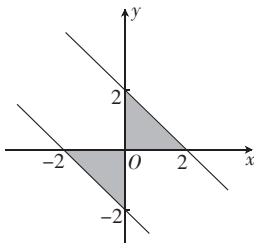
因为当 $x \in [0, 4]$ 时, $f(x)=x^2-2$, 所以 $f(\sqrt{2})=0$. 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 所以关于 x 的不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(-\infty, \sqrt{2})$.

14. -1 【解析】本题考查数列的递推关系, 考查运算求解能力.

由题意知 $a_n=2S_n+1$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1}=2S_{n-1}+1$, 两式相减, 得 $a_n-a_{n-1}=2a_n$, 即 $a_n=-a_{n-1}$, 当 $n=1$ 时, $a_1=-1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 -1, 公比为 -1 的等比数列, 则 $a_5=(-1) \times (-1)^4=-1$.

15. -8 【解析】本题考查线性规划的应用, 考查数形结合的数学思想.

作出不等式组表示的可行域, 如图, 当直线 $y=4x-z$ 过点 $(-2, 0)$ 时, z 取得最小值, 且最小值为 -8.



16. ①③ 【解析】本题考查等差数列与等比数列, 考查逻辑推理能力, 化归与转化的数学思想.

由 $\frac{1}{e^{a_3}+1} + \frac{1}{e^{a_{2019}}+1} \leq 1$, 可得 $\frac{1}{e^{a_3}+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{a_{2019}}+1} - \frac{1}{2} \leq 0$,

易知 $f(x) = \frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{2}$ 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $a_3+a_{2019} \geq 0$,

所以当数列 $\{a_n\}$ 为等差数列时, $S_{2021} = \frac{2021(a_3+a_{2019})}{2} \geq 0$;

当数列 $\{a_n\}$ 为等比数列时, 且 a_3, a_{1011}, a_{2019} 同号, 所以 a_3, a_{1011}, a_{2019} 均大于零, 故 $T_{2021} = (a_{1011})^{2021} > 0$.

故其中所有正确结论的编号是①③.

17. 解: (1) 设外接球的半径为 R , 则 $4\pi R^2 = 5\pi$, 解得 $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 1 分

设 $AA_1=x$, 则 $x^2+1^2+1^2=(2R)^2=5$, 解得 $x=\sqrt{3}$, 3 分

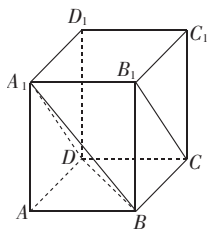
所以该长方体的表面积为 $2 \times (1 \times \sqrt{3} + 1 \times \sqrt{3} + 1 \times 1) = 4\sqrt{3} + 2$ 5 分

(2) 连接 A_1D, A_1B , 因为 $A_1D \parallel B_1C$, 所以 $\angle A_1DB$ 是异面直线 BD 与 B_1C 所成的角或补角, 7 分

又 $BD=\sqrt{2}, A_1B=2, A_1D=2$, 8 分

所以在 $\triangle A_1BD$ 中, $\cos \angle A_1DB = \frac{2^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \times 2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 9 分

即异面直线 BD 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 10 分



评分细则:

- (1)第一问共 5 分,算出外接球半径得 1 分,算出长方体的高得 2 分,正确求出长方体的表面积得 2 分.
(2)第二问共 5 分,说明 $\angle A_1DB$ 是异面直线 BD 与 B_1C 所成的角或补角得 2 分,未说明不得分,利用余弦定理求出 $\cos \angle A_1DB$ 得 2 分,也可以利用等腰三角形的性质求出 $\cos \angle A_1DB$,算对得 2 分.
(3)其他方法按步骤酌情给分.

18. 解:(1)设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,又 $6a_2$ 为 a_3, a_4 的等差中项,

$\therefore 12a_2 = a_3 + a_4, \dots\dots\dots 2$ 分
 $\therefore q^2 + q - 12 = 0, \dots\dots\dots 4$ 分
 $\because q > 0, \therefore q = 3. \dots\dots\dots 5$ 分
(2)由(1)可知 $a_n = 3^{n-1}, \dots\dots\dots 6$ 分

$\therefore b_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}. \dots\dots\dots 8$ 分
设 $\{\frac{1}{b_{n+1}}\}$ 的前 n 项和为 $S_n, \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2}{n(n+1)} = 2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}), \dots\dots\dots 10$ 分
 $\therefore S_n = 2(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{2n}{n+1}. \dots\dots\dots 12$ 分

评分细则:

- (1)第一问共 5 分,根据等差中项性质得出关系式得 2 分,利用通项公式得出 $q^2 + q - 12 = 0$ 得 2 分,算出 $q = 3$ 得 1 分.
(2)第二问共 7 分,算出 $\{a_n\}$ 的通项公式得 1 分,算出 $\{b_n\}$ 的通项公式得 2 分,算出 $\{\frac{1}{b_{n+1}}\}$ 的前 n 项和得 4 分.
(3)其他方法按步骤酌情给分.

19. 解:(1)因为 $\tan A + \tan(A + \frac{\pi}{4}) = 1$,所以 $\tan A + \frac{\tan A + 1}{1 - \tan A} = 1, \dots\dots\dots 1$ 分

则 $\tan^2 A - 3\tan A = 0, \dots\dots\dots 2$ 分
解得 $\tan A = 3(\tan A = 0$ 舍去). $\dots\dots\dots 3$ 分
因为 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \sin^2 A + \cos^2 A = 1$,所以 $\cos^2 A = \frac{1}{10}, \dots\dots\dots 4$ 分
因为 $\tan A = 3 > 0$,所以 $\cos A > 0$,故 $\cos A = \frac{\sqrt{10}}{10}. \dots\dots\dots 5$ 分

(2)因为 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos A = \sqrt{10}, \dots\dots\dots 6$ 分
所以 $bc = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| = 10, \dots\dots\dots 7$ 分
所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = 5 \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{2}. \dots\dots\dots 8$ 分

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A \geq 2bc - \frac{\sqrt{10}}{5}bc = \frac{10 - \sqrt{10}}{5}bc = 20 - 2\sqrt{10}, \dots\dots\dots 10$ 分
当且仅当 $b = c$ 时,等号成立, $\dots\dots\dots 11$ 分
所以 a^2 的最小值为 $20 - 2\sqrt{10}. \dots\dots\dots 12$ 分

20. (1)证明:由题意知, $\triangle ACD, \triangle EBC$ 都是等边三角形,取 AC 的中点 F, BC 的中点 G ,连接 DF, FG, EG ,则 $DF \perp AC, EG \perp BC. \dots\dots\dots 1$ 分
又 $\because$ 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ,平面 $ACD \cap$ 平面 $ABC = AC, \therefore DF \perp$ 平面 $ABC, \dots\dots\dots 2$ 分
同理 $EG \perp$ 平面 $ABC, \therefore DF \parallel EG. \dots\dots\dots 3$ 分
又 $\because \triangle ACD, \triangle ECB, \triangle ACB$ 都是等边三角形, $\therefore DF = EG,$

∴ 四边形 $DFGE$ 是平行四边形, ∴ $DE \parallel FG$, 4 分
 ∵ $DE \not\subset$ 平面 ABC , $FG \subset$ 平面 ABC ,
 ∴ $DE \parallel$ 平面 ABC 6 分

(2) 解: 连接 BF , 以 F 为原点建立如图所示的空间直角坐标系 $F-xyz$,

设 $AC=2$, 则 $E(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, ∴ $\overrightarrow{AB} =$

$(-1, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$, 7 分

平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$ 8 分

设平面 ABE 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0, \\ -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \therefore \text{可取 } \mathbf{n}_2 = (\sqrt{3}, 1, 1). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 又由图知, 所求二面角的平面角是锐角, ∴ 二面角 $E-AB-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分

评分细则:

- (1) 第一问共 6 分, 证出 $DF \perp$ 平面 ABC 得 2 分, 证出 $DE \parallel FG$ 得 2 分, 证出 $DE \parallel$ 平面 ABC 得 2 分. 未说明 $DE \not\subset$ 平面 ABC 扣 1 分.
- (2) 第二问共 6 分, 建立空间直角坐标系, 并正确写出坐标得 1 分, 写出平面 ABC 的法向量得 1 分, 写出平面 ABE 的法向量得 2 分.
- (3) 其他方法按步骤酌情给分.

21. (1) 证明: ∵ $2a_n a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1} + 2 = 0$, ∴ $2(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) + a_{n+1} - a_n = 0$, 1 分
 ∴ $2(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) + (a_{n+1} + 1) - (a_n + 1) = 0$, 2 分
 ∴ $\frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{a_n + 1} = 2$, 3 分
 ∴ 数列 $\{\frac{1}{a_n + 1}\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列. 4 分
 ∴ $\frac{1}{a_n + 1} = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, ∴ $a_n = \frac{1}{2n-1} - 1 = \frac{2-2n}{2n-1}$ 5 分

(2) 解: 由题可知 $b_n = (2n-1) \times 2^n$, $S_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-1) \times 2^n$, 6 分
 $2S_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \dots + (2n-1) \times 2^{n+1}$,
 两式相减得 $-S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + 2 \times 2^n - (2n-1) \times 2^{n+1}$,
 ∴ $S_n = 2^{n+1}(2n-3) + 6$ 8 分
 ∴ $(-1)^n \lambda < n \cdot 2^{n+2} + 6$,
 若 n 为偶数, 则 $\lambda < n \cdot 2^{n+2} + 6$, ∴ $\lambda < 38$; 10 分
 若 n 为奇数, 则 $-\lambda < n \cdot 2^{n+2} + 6$, ∴ $-\lambda < 14$, ∴ $\lambda > -14$.

综上, $-14 < \lambda < 38$ 12 分

评分细则:

(1) 另解:

$$\frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{a_n + 1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1} + a_n + a_{n+1} + 1}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

又因为 $2a_n a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1} + 2 = 0$, 所以 $a_n a_{n+1} = \frac{-a_n - 3a_{n+1} - 2}{2}$, 3 分

代入可得 $\frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{a_n + 1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{\frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})} = 2$ 5 分

(2) 算出 S_n 得 3 分, 分 n 为奇数和偶数两种情况讨论, 每种情况各得 2 分.

(3) 其他方法按步骤酌情给分.

22. 解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = (e^x - 1) \ln x$, 所以 $f(1) = 0$ 1 分

又 $f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x - 1}{x}$, 所以切线的斜率 $k = f'(1) = e - 1$,

则切线方程为 $y = (e - 1)(x - 1)$ 2 分

该切线与 x 轴交于点 $A(1, 0)$, 与 y 轴交于点 $B(0, 1 - e)$, 3 分

所以围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times (e - 1) = \frac{e - 1}{2}$ 4 分

(2) 显然 $x = 1$ 是方程 $f(x) = ax^2 - ax$ 的根, 5 分

当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, 方程 $f(x) = ax^2 - ax$ 等价于 $\frac{e^{ax} - 1}{ax} = \frac{x - 1}{\ln x}$, 则 $\frac{e^{ax} - 1}{ax} = \frac{e^{\ln x} - 1}{\ln x}$ 8 分

记 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x - 1)e^x + 1}{x^2}$,

令 $h(x) = (x - 1)e^x + 1 (x > 0)$, 则 $h'(x) = xe^x > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $h(x) > h(0) = 0$, 即 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又方程等价于 $g(ax) = g(\ln x)$,

故只需 $ax = \ln x$ 在 $(1, +\infty)$ 上有两个不同的根. 10 分

$a = \frac{\ln x}{x}$, 令 $k(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $k'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $x \in (1, e)$ 时, $k'(x) > 0$; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $k'(x) < 0$.

所以 $k(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

故 $k(x)_{\max} = k(e) = \frac{1}{e}$.

又 $k(1) = 0$, 可得 $a \in (0, \frac{1}{e})$ 12 分

评分细则:

(1) 第一问中, 求出切线方程得 2 分, 求出所求的面积得 2 分.

(2) 第二问中, 说明 $x = 1$ 是函数的零点得 1 分, 转化为 $\frac{e^{ax} - 1}{ax} = \frac{e^{\ln x} - 1}{\ln x}$ 得 3 分, 得出 $ax = \ln x$ 得 2 分, 求出 a 的范围得 2 分.

(3) 其他方法按步骤酌情给分.