

云贵川桂四省2021届高三联合考试

数学（理科）

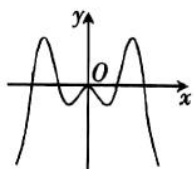
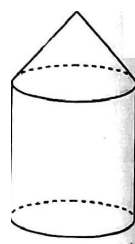
考生注意：

1. 本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分。考试时间120分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：集合与常用逻辑用语，函数，导数，三角函数，向量占40%，数列，不等式，立体几何占60%。

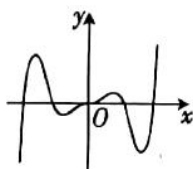
第I卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

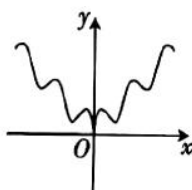
1. 已知集合 $A = \{x \mid 0 < x + 2 < 5\}$, $B = \{x \mid x^2 \leq 4\}$, 则 $A \cap B =$
A. (2,3) B. [2,3)
C. (-2,,2) D. (-2 ,2]
2. 已知向量 $\mathbf{m} = (\lambda + 1, 1)$, $\mathbf{n} = (\lambda + 2, 2)$, 若 $(2\mathbf{m} + \mathbf{n}) \perp (\mathbf{m} - \mathbf{n})$, 则 $\lambda =$
A. -1 B. $-\frac{11}{3}$ C. $-\frac{8}{3}$ D. 2
3. “ $1 < a < 3$ ” 是 “ $\lg a < \lg 3$ ” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件
4. 如图，某粮仓(粮仓的底部位于地面上)是由圆柱和圆锥构成的，若圆柱的高是圆锥高的2倍，且圆锥的母线长是4，侧面积是 4π ，则制作这样一个粮仓的用料面积为
A. $(\sqrt{15} + 4)\pi$ B. $(2\sqrt{15} + 4)\pi$
C. $(3\sqrt{15} + 4)\pi$ D. $(4\sqrt{15} + 4)\pi$
5. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为等差数列，且 $a_1 + b_1 + c_1 = 1$, $a_2 + b_2 + c_2 = 3$, 则 $a_{2020} + b_{2020} + c_{2020} =$
A. 4037 B. 4039 C. 4041 D. 4043
6. 已知正数 m, n 满足 $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{8} = 2$, 则 $3m + 2n$ 的最小值为
A. 24 B. 18 C. 16 D. 12
7. 函数 $f(x) = (3x - x^3)\sin x$ 的部分图象大致为



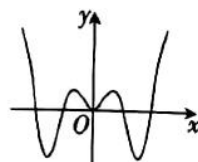
A



B

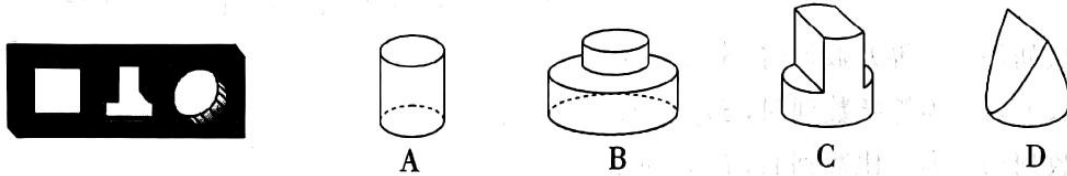


C

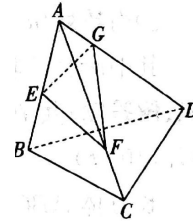


D

8. 已知一块木板上有三个孔洞，则能够塞住这二个孔洞的塞子可能是



9. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，已知 $AE = \frac{3}{5} AB$, $AF = 2FC$, $GD = 3AG$ ，则四面体 $ABCD$ 被截面 EFG 分得的上下两部分的体积之比为



- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{10}$
C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{4}{15}$

10. 图 1 是第七届国际数学教育大会(ICME-7)的会徽图案，它是由一串直角三角形演化而成的(如图2)，其中 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_7A_8 = 1$ ，则 $\sin \angle A_6OA_8 =$

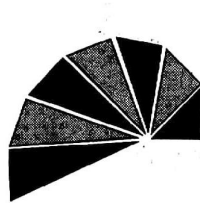


图 1

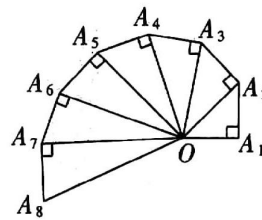


图 2

- A. $\frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{21}}{28}$ B. $\frac{7\sqrt{2}-2\sqrt{21}}{28}$
C. $\frac{14\sqrt{3}+1}{28}$ D. $\frac{14\sqrt{3}-1}{28}$ 图 2

11. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数， $f'(x)$ 为其导函数， $f(1-2x) = f(2x-1)$ ，

$f(-2) = 0$ ，当 $x > 0$ 时， $-xf'(x) < f(x)$ ，则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是

- A. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
C. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ D. $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

12. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $2\sin C = \frac{a^2 + b^2 + 1 + 2ab}{a + b}$ ，则 $\triangle ABC$ 外接圆面积的最小值为

- A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分 把答案填在答题卡中的横线上。

13. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，且当 $x \in [0, 4]$ 时， $f(x) = x^2 - 2$ ，则关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集为_____。

14. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若点 (S_n, a_n) 在直线 $y = 2x + 1$ 上，则 $a_5 =$ _____。

15. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} xy \geq 0, \\ |x + y| \leq 2, \end{cases}$ 则 $z = 4x - y$ 的最小值为_____。

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 且 $\frac{1}{e^{a_3+1}} + \frac{1}{e^{a_{2019}+1}} \leq 1$, 有下述四个结论:

- ① 当数列 $\{a_n\}$ 为等差数列时, $S_{2021} \geq 0$;
- ② 当数列 $\{a_n\}$ 为等差数列时, $S_{2021} \leq 0$;
- ③ 当数列 $\{a_n\}$ 为等比数列时, $T_{2021} > 0$;
- ④ 当数列 $\{a_n\}$ 为等比数列时, $T_{2021} < 0$.

其中所有正确结论的编号是_____.

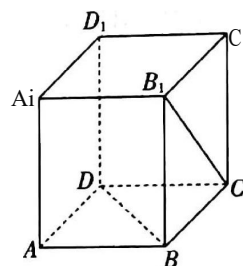
三、解答题: 共 70 分 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 其外接球的表面积为 5π .

(1) 求该长方体的表面积;

(2) 求异面直线 BD 与 B_1C 所成角的余弦值.



18. (12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $6a_2$ 为 a_3, a_4 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比;

(2) 若 $a_1 = 1$, 设 $b_n = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_n$, 求数列 $\{\frac{1}{b_{n+1}}\}$ 的前 n 项和.

19. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\tan A + \tan(A + \frac{\pi}{4}) = 1$.

(1) 求 $\cos A$;

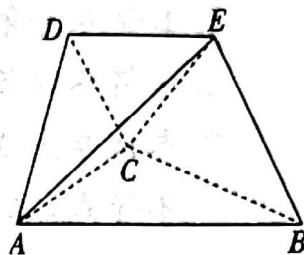
(2) 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{10}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积, 并求 a^2 的最小值

20. (12 分)

在如图所示的空间几何体中，平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ，平面 $ECB \perp$ 平面 ABC ， $\triangle ACD$ ， $\triangle ECB$ ， $\triangle ACB$ 都是等边三角形.

(1) 证明： $DE \parallel$ 平面 ABC .

(2) 求二面角 $E-AB-C$ 的余弦值.



21. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 0, $2a_n a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1} + 2 = 0$.

(1) 证明数列 $\{\frac{1}{a_n + 1}\}$ 是等差数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{2^n}{a_n + 1}$ ，若不等式 $(-1)^n \lambda < S_n + 3 \times 2^{n+1}$

对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立，求 λ 的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (e^{ax} - 1) \ln x$ ($a > 0$).

(1) 当 $a = 1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = ax^2 - ax$ 在 $[1, +\infty)$ 上恰有三个不同的实数解，求 a 的取值范围.