

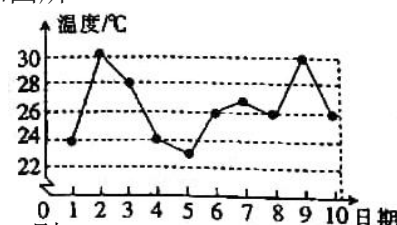
高三数学试卷(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第I卷和第II卷两部分,共150分,考试时间120分钟.
2. 请将各题答案填在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容.

第I卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | -1 < x \leq 2\}$ B. $\{x | -2 < x < 3\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
2. 若 $\bar{z}(1+i) = 1-2i$, 则 $z =$
A. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ C. $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ D. $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
3. “养国子以道,乃教之六艺”出自《周礼·保氏》.其中六艺是指礼、乐、射、御、书、数,是中国周朝时期贵族教育体系中要求学生所必需掌握的六种基本才能,而一般商贾之家,因受当时的生产力、经济等各方面条件制约,在教育方面只能为孩童挑选部分才能进行培养.已知某商贾觉得“君子不学礼无以立”,而其两个孩童对“数”均有浓厚兴趣,商贾依据自己的能力,只能为每个孩童择四艺进行培养.若令商贾和两个孩童都满意,其余二艺随机选取,那么两个孩童至少有一个选到“御”的概率为
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{4}{5}$
4. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a=3, b=5$, 设命题 $p: \exists c \in \mathbb{N}^*, C$ 为钝角. 关于命题 p 有以下四个判断:
① p 为真命题; ② $\neg p$ 为 $\forall c \in \mathbb{N}^*, C$ 不是钝角;
③ p 为假命题; ④ $\neg p$ 为 $\exists c \in \mathbb{N}^*, C$ 不是钝角;
其中判断正确的序号是
A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ①④
5. 某地区7月1日至7月10日白天的平均气温的折线图如图所示,则下列判断错误的是
A. 从7月2日到7月5日白天的平均气温呈下降趋势
B. 这10天白天的平均气温的极差大于 6°C
C. 这10天中白天的平均气温为 26°C 的频率最大
D. 这10天中白天的平均气温大于 26°C 的有5天

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{CD} = 7\overrightarrow{ED}$, 且 $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{AD} + \mu\overrightarrow{DE}$, 则 $\lambda + \mu =$
A. -5 B. -6 C. 5 D. 6
7. 如图,某柱桩的底座由一个正六棱柱中间挖掉一个圆柱构成,已知该正六棱柱每个侧面是边长为 30cm 的正方形,所挖掉的圆柱的底面半径为 10cm . 为了延长底座的使用时长,需将底座地面之上的部分(除与地面直接接触的底面之外的表面)涂上防氧化层,则涂层的总面积为


- A. $(2700\sqrt{3} + 5400 + 500\pi)\text{cm}^2$ B. $(2700\sqrt{3} + 5400 + 400\pi)\text{cm}^2$
 C. $(1350\sqrt{3} + 5400 + 500\pi)\text{cm}^2$ D. $(1350\sqrt{3} + 5400 + 400\pi)\text{cm}^2$
8. 若抛物线 $x^2 = 8y$ 上一点 M 到该抛物线焦点 F 的距离为 6, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N , 设 O 为坐标原点, 则四边形 $OFMN$ 的面积为
 A. 12 B. $12\sqrt{2}$ C. 16 D. $16\sqrt{2}$
9. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $A+B=2C$, 则函数 $f(x) = 2\sin(x+B)\cos x - \sin 2x$ 图象的对称轴方程是
 A. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 C. $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
10. 某流行病调查中心的疾控人员针对该地区某类只在人与人之间相互传染的疾病, 通过现场调查与传染源传播途径有关的蛛丝马迹, 根据传播链及相关数据, 建立了与传染病相关确诊病例人数 $H(t)$ 与传染源感染后至隔离前时长 t (单位: 天) 的模型 $H(t) = e^{kt+\lambda}$. 已知甲传染源感染后至隔离前时长为 5 天, 与之相关确诊病例人数为 8; 乙传染源感染后至隔离前时长为 8 天, 与之相关确诊病例人数为 20. 若某传染源感染后至隔离前时长为两周, 则与之相关的确诊病例人数约为
 A. 44 B. 48 C. 80 D. 125
11. 已知底面为矩形的四棱锥 $P-ABCD$ 每个顶点都在球 O 的球面上, $PA \perp AD$, $PA = AB$, $PB = \sqrt{2}AB$, 且 $BC = 2\sqrt{2}$. 若球 O 的体积为 $\frac{32\pi}{3}$, 则棱 PB 的中点到平面 PCD 的距离为
 A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
12. 已知双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{m+4} + \frac{y^2}{m} = 1$, 给出下列四个结论:
 ① m 的取值范围是 $(-4, 0)$;
 ② C 的焦距与 m 的取值无关;
 ③ 当 C 的离心率不小于 2 时, m 的最小值为 -3;
 ④ 存在实数 m , 使得点 (m^2, m) 在 C 上.
 其中结论正确的个数为
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 若 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - 2\cos \alpha} = \underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$.
14. 若直线 l 过点 $(-2, 0)$, 且倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 l 被圆 $C: (x+3)^2 + (y-3)^2 = 10$ 所截得的弦长为 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$.
15. 若函数 $f(x) = \log_9(x+2) - \log_9 x (x > \frac{1}{4})$, 则 $f(x)$ 的值域为 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$.
16. 函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 现有下列四个命题:
 ① 函数 $g(x) = f(x)\cos x$ 为奇函数;
 ② 函数 $h(x) = x[f(x) - f(2)]$ 有且只有 3 个零点
 ③ 不等式 $x[f(x) - f(2)] \leq 0$ 的解集为 $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$;
 ④ $f(x)$ 的解析式可能为 $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$

其中所有真命题的序号是 ▲ .

三、解答题：本大题共6小题，共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答,第22,23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题：共60分

17. (12 分)

为了解生猪市场与当地居民人均收入水平的关系，农业农村部对160个城镇当月的猪肉价格(元/千克)与居民人均收入(元/月)进行了随机调研，得到如下表格：

猪肉价格(元/千克) 人均收入(元/月)	(0,40]	(40,50]	(50,60)
(0,3000]	6	15	0
(3000,4000]	2	27	5
(4000,5000]	9	45	16
(5000,6000]	0	16	19

- (1) 估计全国各地猪肉价格在(50 , 60] (元 / 于克)内的概率；
- (2) 估计这160个城镇的居民人均收入(元 / 月)的中位数(计算结果保留整数)；
- (3) 根据所给数据，完成下面的列联表，并根据列联表，判断是否有99.5%的把握认为当月的猪肉价格与当地居民人均收入水平有关.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.05	0.010	0.005
k	3.841	6.635	7.879

猪肉价格(元/千克) 人均收入(元/月)	(0,50]	(50,60]	合计
(0,4000]			
(4000,6000]			
合计			

18. (12 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

(1)试问数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 一定是等比数列吗? 说明你的理由.

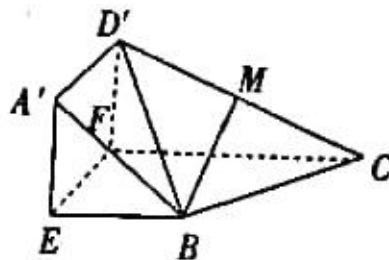
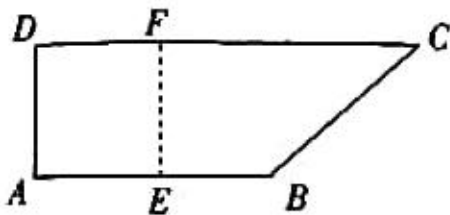
(2)若 $a_4 a_5 = 9a_6$, $a_1 a_2 a_3 = 27$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及数列 $\{(-1)^n n + 4a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19.(12分)

如图,在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{3}CD = 2$, E 为 AB 的中点, F 在线段 CD 上,且 $EF \parallel AD$.将四边形 $DAEF$ 沿 EF 折起,使得到的四边形 $D'A'EF$ 所在平面与平面 $BCFE$ 垂直, M 为 $D'C$ 的中点,连接 BD' , BA' , BM .

(1)证明: $CF \perp BM$.

(2)求平面 $A'D'FE$ 与平面 $D'BC$ 所成锐二面角的余弦值.



20 (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,左、右焦点分别为 F_1, F_2, Q 为 C 的上顶点,且满足 $\overrightarrow{F_1Q} \cdot \overrightarrow{F_2Q} = -8$

(1)求 C 的方程.

(2)若 P 为直线 $x = 8$ 上的动点, A, B 分别为 C 的左、右顶点, PA 与 C 的另一个交点为 M , PB 与 C 的另一个交点为 N .是否存在定点 G ,使得直线 MN 恒过该定点 G ?若存在,求 G 的坐标;若不存在,说明理由.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e}$

(1)若曲线 $y = f(x)$ 存在一条切线与直线 $y = ax$ 垂直,求 a 的取值范围.

(2)证明: $f(x) < x^2 - \ln x - \frac{3}{4}\sin x$.

(二)选考题:共10分.请考生从第22,23两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一个题目计分.

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4\cos \alpha, \\ y = -4 + 4\sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数).以坐标原点为

极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $3\rho \cos \theta + 4\rho \sin \theta = m$.

(1)求 C 的极坐标方程;

(2)若 l 与 C 相交,求 m 的取值范围.

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x) = |x - a| + |x - 3a|$

(1)求不等式 $f(x) > 1 + |x - a|$ 的解集

(2)若 $f(x) > \sqrt{a+18}$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,求 a 的取值范围.

