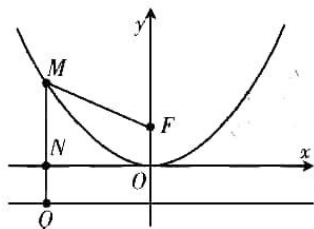
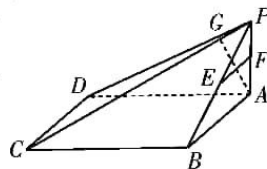


高三数学试卷参考答案(理科)

1. D 由 $x^2 - x - 6 < 0$, 得 $-2 < x < 3$, 所以 $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 故 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.
2. B 由题意得 $z = \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, 故 $z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.
3. B 依题意可知, “礼”“数”为必选, 因此两个孩童都不选“御”的概率为 $\frac{C_3^2 C_3^2}{C_4^2 C_4^2} = \frac{1}{4}$, 故两个孩童至少有一个选到“御”的概率为 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
4. A 因为特称命题的否定是全称命题, 所以 $\neg p$ 为 $\forall c \in \mathbb{N}^*$, C 不是钝角. 当 $c=6$ 或 7 时, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} < 0$, 则 C 为钝角, 故 p 为真命题.
5. D 从 7 月 2 日到 7 月 5 日白天的平均气温呈下降趋势. 这 10 天白天的平均气温的极差大于 6°C . 这 10 天中白天的平均气温为 26°C 的频率为 0.3 , 比其他平均气温的频率都要大. 这 10 天中白天的平均气温大于 26°C 的只有 4 天. 故选 D.
6. A 因为 $\overrightarrow{CD} = 7\overrightarrow{ED}$, 所以 $\overrightarrow{CE} = -6\overrightarrow{DE}$, 则 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} - 6\overrightarrow{DE}$, 所以 $\lambda + \mu = 1 - 6 = -5$.
7. C $S_{\text{净层}} = S_{\text{正六面体上底面}} + S_{\text{正六面体侧面}} + S_{\text{圆柱侧面}} - S_{\text{圆柱上底面}} = (6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 30^2 + 6 \times 30^2 + 2\pi \times 10 \times 30 - \pi \times 10^2) \text{cm}^2 = (1350\sqrt{3} + 5400 + 500\pi) \text{cm}^2$.
8. B 如图, 抛物线的准线方程为 $y = -2$, 焦点 $F(0, 2)$, 因为 $|MF| = 6$, 所以 M 到准线的距离为 6, 因此 $|MN| = 6 - 2 = 4$, 且 $|ON|^2 = 8 \times 4$, $|ON| = 4\sqrt{2}$, 故四边形 $OFMN$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{2}(2+4)}{2} = 12\sqrt{2}$.



9. C 因为 $\pi - (A+C) = B$, $A+C = 2B$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$,
 所以 $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})\cos x - \sin 2x = (\sin x + \sqrt{3}\cos x)\cos x - \sin 2x$
 $= -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 由 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 得 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
10. D 依题意得 $H(5) = e^{5k+\lambda} = 8, H(8) = e^{8k+\lambda} = 20, \frac{H(8)}{H(5)} = \frac{e^{8k+\lambda}}{e^{5k+\lambda}} = e^{3k} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$, 所以 $H(14) = e^{14k+\lambda} = e^{5k+\lambda} \cdot (e^{3k})^3 = 8 \times (\frac{5}{2})^3 = 125$. 故若某传染源感染后至隔离前时长为两周, 则相关确诊病例人数约为 125.
11. B $\because PA = AB, PB = \sqrt{2}AB, \therefore PA \perp AB$, 又 $PA \perp AD, AD \cap AB = A$,
 $\therefore PA \perp$ 平面 $ABCD$. $\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形, $\therefore$ 侧棱 PC 为球 O 的直径. 设球 O 的半径为 R , 则 $\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{32\pi}{3}$, 即 $R = 2$, 又 $R = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AP^2}}{2} = \frac{\sqrt{8 + 2AB^2}}{2}$, 解得 $AB = 2$. 过 A 作 $AG \perp PD$ 于 G , 取棱 PA 的中点 F , 连接 EF .
 易证 $CD \perp$ 平面 APD , 则 $CD \perp AG$, 从而 $AG \perp$ 平面 PCD .
 由等面积法可得 $AG = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 则 F 到平面 PCD 的距离为 $\frac{1}{2}AG = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
 $\because EF \parallel AB \parallel CD, \therefore EF \parallel CD$, 则 E 到平面 PCD 的距离等于 F 到平面 PCD 的距离,
 故棱 PB 的中点到平面 PCD 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
12. C 由题意得 $(m+4)m < 0$, 则 $-4 < m < 0$, 故①正确. 因为 $-4 < m < 0$, 所以 $a^2 = m+4, b^2 = -m, c^2 = a^2 + b^2 = 4$, 则 $c = 2$, 从而 C 的焦距为 4, 与 m 的取值无关, 故②正确. 若 C 的离心率不小于 2, 则 $e = \sqrt{1 + \frac{-m}{m+4}} =$



$\frac{2}{\sqrt{m+4}} \geq 2$, 解得 $m \leq -3$, 故③不正确. 假设存在实数 m , 使得点 (m^2, m) 在 C 上, 则 $\frac{m^4}{m+4} + \frac{m^2}{m} = 1$, 则 $m^4 + m^2 + 3m - 4 = 0$. 设函数 $f(m) = m^4 + m^2 + 3m - 4$, 因为 $f(-2) = 10 > 0$, $f(-1) = -5 < 0$, 从而存在 $m \in (-2, -1)$, 使得 $f(m) = 0$, 故④正确.

$$13. \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - 2 \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha - 2} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

14. $2\sqrt{2}$ 由题意, 可得 l 的方程为 $x - y + 2 = 0$. 易知点 C 的坐标为 $(-3, 3)$. 设点 C 到直线 l 的距离为 d , 则 $d = \frac{|-3 - 3 + 2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 则所求弦长为 $2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{10 - 8} = 2\sqrt{2}$.

15. $(0, 1)$ 因为 $f(x) = \log_9 \frac{x+2}{x} = \log_9 (1 + \frac{2}{x})$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{4}, +\infty)$ 上单调递减, 又 $1 < 1 + \frac{2}{x} < 9$, 所以 $f(x)$ 的值域为 $(0, 1)$.

16. ②③④ 若 $g(x) = f(x) \cos x$, 则 $g(-x) = f(-x) \cos(-x) = f(x) \cos x = g(x)$, 则 $g(x) = f(x) \cos x$ 为偶函数, ①是假命题.

设函数 $F(x) = f(x) - f(2)$, $F(2) = f(2) - f(2) = 0 = F(-2)$, $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且只有 2 个零点, 所以 $h(2) = h(-2) = h(0) = 0$, $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且只有 3 个零点, ②是真命题.

因为 $x[f(x) - f(2)] \leq 0$, 所以当 $x < 0$ 时, $f(x) - f(2) \geq 0$, 则 $x \leq -2$; 当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f(x) > 0$, 故 $x[f(x) - f(2)] \leq 0$ 的解集为 $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$, ③是真命题.

若 $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$, 则此函数满足 $f(x)$ 为偶函数, $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$,

设 $p(x) = f'(x)$, $p'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2 - 2 = 0$, 则 $p(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

在 $[0, +\infty)$ 上, $f'(x) \geq f'(0) = 0$, 所以此函数还满足在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, ④是真命题.

17. 解: (1) 因为这 160 个城镇的猪肉价格在 $(50, 60]$ (元/千克) 内的频率为 $\frac{5+16+19}{160} = \frac{1}{4}$, 1 分

所以据此得全国各地猪肉价格在 $(50, 60]$ (元/千克) 内的概率约为 $\frac{1}{4}$, 2 分

(2) 因为居民人均收入 (元/月) 在 $(0, 4000]$ 内的频率为 $\frac{6+15+2+27+5}{160} = \frac{11}{32} < \frac{1}{2}$, 3 分

居民人均收入 (元/月) 在 $(0, 5000]$ 内的频率为 $\frac{55+9+45+16}{160} = \frac{25}{32} > \frac{1}{2}$, 4 分

所以居民人均收入 (元/月) 的中位数在 $(4000, 5000]$ 之间. 5 分

因为 $4000 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{11}{32}}{\frac{25}{32} - \frac{11}{32}} \times 1000 = \frac{30500}{7} \approx 4357$, 6 分

所以中位数约为 4357. 7 分

(3) 列联表如下:

猪肉价格(元/千克) 人均收入(元/月)	(0, 50]	(50, 60]	合计
(0, 4000]	50	5	55
(4000, 6000]	70	35	105
合计	120	40	160

..... 9 分

因为 $K^2 = \frac{160 \times (50 \times 35 - 70 \times 5)^2}{55 \times 105 \times 120 \times 40} = \frac{1120}{99} \approx 11.313 > 7.879$, 11 分

所以有 99.5% 的把握认为当月的猪肉价格与当地居民人均收入水平有关. 12 分

18. 解: (1) 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 不一定是等比数列. 1 分

理由如下:

若 $q = -1$, 则 $a_n + a_{n+1} = a_n(1+q) = 0$, 2 分

此时数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 不是等比数列; 3 分

若 $q \neq -1$, 则数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 一定是公比为 q 的等比数列.

故数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 不一定是等比数列. 4 分

(2) 由 $a_1 a_5 = 9a_3$, 且 $a_4 a_5 = a_3 a_6$, 5 分

得 $a_3 = 9$ 6 分

因为 $a_1 a_2 a_3 = 27$, 所以 $a_2^3 = 27$, 则 $a_2 = 3$, 7 分

所以 $q = \frac{9}{3} = 3, a_1 = 1$, 8 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^{n-1}$, 9 分

故 $S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - \dots + (-1)^n n + 4 \times \frac{1-3^n}{1-3}$, 10 分

当 n 为偶数时, $S_n = \frac{1}{2}n + 2(3^n - 1)$; 11 分

当 n 为奇数时, $S_n = \frac{1}{2}(n+1) - (n+1) + 2(3^n - 1) = -\frac{1}{2}(n+5) + 2 \cdot 3^n$ 12 分

19. (1) 证明: 因为 $EF \parallel AD, \angle ADC = 90^\circ$, 所以 $\angle CFE = 90^\circ$, 1 分

则 $EF \perp DF$, 即 $EF \perp D'F$. 又平面 $D'A'EF \perp$ 平面 $EFCB$,

平面 $D'A'EF \cap$ 平面 $EFCB = EF$, 所以 $D'F \perp$ 平面 $BCFE$, 2 分

所以 $D'F \perp CF$. 又由 $\angle CFE = 90^\circ$, 可知 $EF \perp CF$, 且 $D'F \cap EF = F$,

所以 $CF \perp$ 平面 $D'A'EF$ 3 分

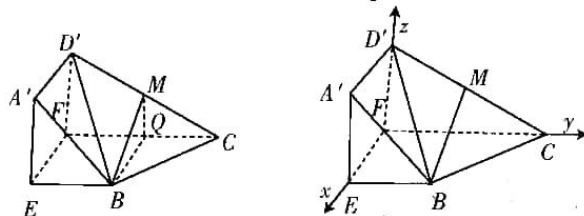
取 CF 的中点 Q , 连接 MQ, BQ , 依题意可得四边形 $EFQB$ 为平行四边形, 则 $BQ \parallel EF$ 4 分

因为 M 为 $D'C$ 的中点, 所以 $MQ \parallel D'F$, 又 $BQ \cap MQ = Q$,

所以平面 $BMQ \parallel$ 平面 $D'A'EF$, 5 分

所以 $CF \perp$ 平面 BMQ , 因为 $BM \subset$ 平面 BMQ , 所以 $CF \perp BM$ 6 分

(2) 解: 如图, 以 F 为坐标原点, 建立空间直角坐标系 $F-xyz$.



则 $D'(0, 0, 2), B(2, 2, 0), C(0, 4, 0), \overrightarrow{D'B} = (2, 2, -2), \overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0)$ 7 分

设平面 $D'BC$ 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{D'B} = 2x + 2y - 2z = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC} = -2x + 2y = 0, \end{cases}$ 8 分

令 $x = 1$, 得 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 2)$ 9 分

易知平面 $A'D'FE$ 的一个法向量 $\mathbf{n}_2 = \overrightarrow{FC} = (0, 4, 0)$, 10 分

且 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{4}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 11 分

故平面 $A'D'FE$ 与平面 $D'BC$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 12 分

20. 解: (1) 由题意, 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 则 $Q(0, b), c^2 = e^2 a^2 = \frac{3}{4}a^2, b^2 = a^2 - c^2 = \frac{1}{4}a^2$, 1 分

$\overrightarrow{F_1Q} \cdot \overrightarrow{F_2Q} = -c^2 + b^2 = -\frac{1}{2}a^2 = -8$, 因此 $a^2 = 16, b^2 = 4$ 3 分

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 4 分

(2) 由(1)可知 $A(-4, 0), B(4, 0)$, 可设动点 P 为 $(8, m)$,

则 AP 所在直线的方程为 $y = \frac{m}{12}(x+4)$, BP 所在直线的方程为 $y = \frac{m}{4}(x-4)$ 5 分

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = \frac{m}{12}(x+4), \end{cases}$ 得 $(36+m^2)x^2 + 8m^2x + 16m^2 - 576 = 0$,

$-4x_1 = \frac{16m^2 - 576}{36+m^2}, x_1 = \frac{144-4m^2}{36+m^2}, y_1 = \frac{24m}{36+m^2}$, 6 分

$M(\frac{144-4m^2}{36+m^2}, \frac{24m}{36+m^2})$, 同理可得 $N(\frac{4m^2-16}{4+m^2}, \frac{-8m}{4+m^2})$ 7 分

根据椭圆的对称性, 若存在定点 G , 则点 G 必在 x 轴上.

当直线 MN 的斜率不存在时, $\frac{4m^2-16}{4+m^2} = \frac{144-4m^2}{36+m^2}$, 解得 $m^2 = 12$,

此时直线 MN 的方程为 $x = 2$, 得 $G(2, 0)$ 8 分

当 $m=0$ 时, 直线 MN 的方程为 $y=0$, 直线 MN 过点 $G(2,0)$ 9 分

当 $m \neq 0$ 且直线 MN 的斜率存在时, $k_{GM} = \frac{\frac{24m}{36+m^2}}{\frac{144-4m^2}{36+m^2}-2} = \frac{4m}{12-m^2}$,

$k_{GN} = \frac{\frac{-8m}{4+m^2}}{\frac{4m^2-16}{4+m^2}-2} = \frac{4m}{12-m^2} = k_{GM}$, 所以 M, N, G 三点共线,

则直线 MN 过点 $G(2,0)$ 11 分

综上, 存在定点 G , 且 G 的坐标为 $(2,0)$ 12 分

21. (1) 解: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$ 1 分

因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 所以 $\frac{1}{x} - \frac{1}{e} > -\frac{1}{e}$ 2 分

因为曲线 $y=f(x)$ 存在一条切线与直线 $y=ax$ 垂直, 所以 $-\frac{1}{a} > -\frac{1}{e}$, 3 分

解得 $a < 0$ 或 $a > e$, 则 a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (e, +\infty)$ 5 分

(2) 证明: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{xe}$.

当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$ 6 分

所以 $f(x)_{\max} = f(e) = \ln e - \frac{e}{e} = 0$ 7 分

设函数 $g(x) = x^2 - \ln x$, 则 $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

当 $x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$ 8 分

所以 $g(x)_{\min} = g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$ 9 分

因为 $\ln 2 > \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$, 所以 $g(x)_{\min} > \frac{3}{4}$ 10 分

因为 $\frac{3}{4} \sin x \in [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$, 所以 $x^2 - \ln x - \frac{3}{4} \sin x > 0$ 11 分

又 $f(x) \leq f(x)_{\max} = 0$, 所以 $f(x) < x^2 - \ln x - \frac{3}{4} \sin x$ 12 分

22. 解: (1) 由 $\begin{cases} x=4\cos\alpha, \\ y=-4+4\sin\alpha, \end{cases}$ 得 $x^2 + (y+4)^2 = 16$, 2 分

即 $x^2 + y^2 + 8y = 0$, 3 分

则 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 8\rho\sin\theta = 0$, 4 分

即 $\rho + 8\sin\theta = 0$ (或 $\rho = -8\sin\theta$). 5 分

(2) 因为 l 的极坐标方程为 $3\rho\cos\theta + 4\rho\sin\theta = m$,

所以 l 的直角坐标方程为 $3x + 4y - m = 0$ 7 分

由 (1) 知, 曲线 C 表示圆心为 $C(0, -4)$, 半径为 4 的圆, 8 分

则 C 到 l 的距离 $d = \frac{|m+16|}{5} < 4$, 9 分

解得 $-36 < m < 4$, 即 m 的取值范围为 $(-36, 4)$ 10 分

23. 解: (1) 由 $f(x) > 1 + |x-a|$, 得 $|x-3a| > 1$, 1 分

则 $x-3a < -1$ 或 $x-3a > 1$, 3 分

即 $x < 3a-1$ 或 $x > 3a+1$.

故不等式 $f(x) > 1 + |x-a|$ 的解集为 $(-\infty, 3a-1) \cup (3a+1, +\infty)$ 5 分

(2) 因为 $f(x) = |x-a| + |x-3a| \geq |x-a - (x-3a)| = |2a|$, 6 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $|2a|$ 7 分

因为 $f(x) > \sqrt{a+18}$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以 $\sqrt{a+18} < |2a|$, 8 分

又 $a+18 \geq 0$, 所以 $a \in [-18, -2) \cup (-\frac{9}{4}, +\infty)$ 10 分