

高三数学试卷参考答案(文科)

1. B $\because P = \{x | x \leq 5\}, Q = \{x | x > 4\}, \therefore P \cap Q = \{x | 4 < x \leq 5\}.$

2. A 由题意得 $z = \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$

3. C 这9个数中2,3,5,7,11是质数,故所求概率为 $\frac{5}{9}.$

4. A 因为特称命题的否定是全称命题,所以 $\neg p$ 为 $\forall c \in \mathbb{N}^*, C$ 不是钝角.当 $c=6$ 或 7 时, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} < 0$,则 C 为钝角,故 p 为真命题.

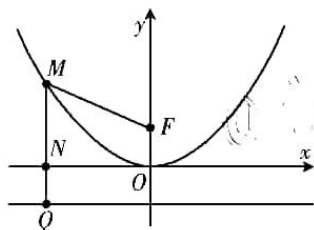
5. D 从7月2日到7月5日白天的平均气温呈下降趋势,这10天白天的平均气温的极差大于 6°C .这10天中白天的平均气温为 26°C 的频率为 0.3 ,比其他平均气温的频率都要大,这10天中白天的平均气温大于 26°C 的只有4天,故选D.

6. A 因为 $\overrightarrow{CD} = 7\overrightarrow{ED}$,所以 $\overrightarrow{CE} = -6\overrightarrow{DE}$,则 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} - 6\overrightarrow{DE}$,所以 $\lambda + \mu = 1 - 6 = -5.$

7. D 因为 $a_n = \sqrt{1+4n^2+4n} = 2n+1$,所以数列 $\{a_n\}$ 的前20项和为 $3+5+\dots+41 = \frac{(3+41) \times 20}{2} = 440.$

8. C $S_{\text{涂层}} = S_{\text{正六面体上底面}} + S_{\text{正六面体侧面}} + S_{\text{圆柱侧面}} - S_{\text{圆柱上底面}} = (6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 30^2 + 6 \times 30^2 + 2\pi \times 10 \times 30 - \pi \times 10^2) \text{cm}^2 = (1350\sqrt{3} + 5400 + 500\pi) \text{cm}^2.$

9. B 如图,抛物线的准线方程为 $y = -2$,焦点 $F(0, 2)$,因为 $|MF| = 6$,所以 M 到准线的距离为6,因此 $|MN| = 6 - 2 = 4$,且 $|ON|^2 = 8 \times 4$, $|ON| = 4\sqrt{2}$,故四边形 $OFMN$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{2}(2+4)}{2} = 12\sqrt{2}.$



10. C 因为 $\pi - (A+C) = B, A+C = 2B$,所以 $B = \frac{\pi}{3}.$

所以 $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})\cos x - \sin 2x = (\sin x + \sqrt{3}\cos x)\cos x - \sin 2x$

$= -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

由 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,得 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

11. D 依题意得 $H(5) = e^{5k+\lambda} = 8, H(8) = e^{8k+\lambda} = 20, \frac{H(8)}{H(5)} = \frac{e^{8k+\lambda}}{e^{5k+\lambda}} = e^{3k} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$,所以 $H(14) = e^{14k+\lambda} = e^{5k+\lambda} \cdot (e^{3k})^3$

$= 8 \times (\frac{5}{2})^3 = 125$.故若某传染源感染后至隔离前时长为两周,则相关确诊病例人数约为125.

12. B $\because PA = AB, PB = \sqrt{2}AB, \therefore PA \perp AB$,又 $PA \perp AD, AD \cap AB = A$,

$\therefore PA \perp$ 平面 $ABCD$. $\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形, $\therefore$ 侧棱 PC 为球 O 的直径.设球 O 的半径为 R ,则 $\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{32\pi}{3}$,即 $R = 2$,又 $R = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AP^2}}{2} = \frac{\sqrt{8 + 2AB^2}}{2}$,解得

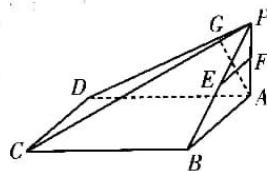
$AB = 2$.过 A 作 $AG \perp PD$ 于 G ,取棱 PA 的中点 F ,连接 EF .

易证 $CD \perp$ 平面 APD ,则 $CD \perp AG$,从而 $AG \perp$ 平面 PCD .

由等面积法可得 $AG = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$,则 F 到平面 PCD 的距离为 $\frac{1}{2}AG = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

$\because EF \parallel AB \parallel CD, \therefore EF \parallel CD$,则 E 到平面 PCD 的距离等于 F 到平面 PCD 的距离,

故棱 PB 的中点到平面 PCD 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}.$



13. $\frac{1}{3} \quad \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - 2\cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha - 2} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$

14. $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 因为 $f(x)$ 在 $(25, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) > f(25) = \log_5 27 = \frac{3}{2}$.
15. $2\sqrt{2}$ 由题意, 可得 l 的方程为 $x - y + 2 = 0$, 易知点 C 的坐标为 $(-3, 3)$. 设点 C 到直线 l 的距离为 d , 则 $d = \frac{|-3 - 3 + 2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 则所求弦长为 $2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{10 - 8} = 2\sqrt{2}$.
16. ②③④ 若 $g(x) = f(x)\cos x$, 则 $g(-x) = f(-x)\cos(-x) = f(x)\cos x = g(x)$, 则 $g(x) = f(x)\cos x$ 为偶函数, ①是假命题.
 设函数 $F(x) = f(x) - f(2)$, $F(2) = f(2) - f(2) = 0 = F(-2)$, $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且只有 2 个零点, 所以 $h(2) = h(-2) = h(0) = 0$, $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且只有 3 个零点, ②是真命题.
 因为 $x[f(x) - f(2)] \leq 0$, 所以当 $x < 0$ 时, $f(x) - f(2) \geq 0$, 则 $x \leq -2$; 当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f(x) > 0$, 故 $x[f(x) - f(2)] \leq 0$ 的解集为 $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$, ③是真命题.
 若 $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$, 则此函数满足 $f(x)$ 为偶函数, $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$,
 设 $p(x) = f'(x)$, $p'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2 - 2 = 0$, 则 $p(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,
 在 $[0, +\infty)$ 上, $f'(x) \geq f'(0) = 0$, 所以此函数还满足在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, ④是真命题.
17. (1) 证明: 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $B_1C_1 \parallel BC$, 2 分
 因为 $BC \subset$ 平面 A_1BC , $B_1C_1 \not\subset$ 平面 A_1BC ,
 所以 $B_1C_1 \parallel$ 平面 A_1BC 4 分
 (2) 解: 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,
 因为 $AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp AB$ 5 分
 又 $AB = 1$, $AA_1 = 2$, 所以 $A_1B = \sqrt{5}$ 6 分
 同理可得 $A_1C = 2\sqrt{2}$ 7 分
 因为 $AB \perp AC$, $AB = 1$, $AC = 2$, 所以 $BC = \sqrt{5}$ 8 分
 所以 $\triangle A_1BC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{5 - 2} = \sqrt{6}$ 9 分
 设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h ,
 由 $V_{A-A_1BC} = V_{A_1-ABC}$, 得 $\frac{1}{3} \times \sqrt{6} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 2$, 11 分
 解得 $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 12 分
18. 解: (1) 因为这 160 个城镇的猪肉价格在 $(50, 60]$ (元/千克) 内的频率为 $\frac{5+16+19}{160} = \frac{1}{4}$, 1 分
 所以据此得全国各地猪肉价格在 $(50, 60]$ (元/千克) 内的概率约为 $\frac{1}{4}$ 2 分
 (2) 因为居民人均收入 (元/月) 在 $(0, 4000]$ 内的频率为 $\frac{6+15+2+27+5}{160} = \frac{11}{32} < \frac{1}{2}$, 3 分
 居民人均收入 (元/月) 在 $(0, 5000]$ 内的频率为 $\frac{55+9+45+16}{160} = \frac{25}{32} > \frac{1}{2}$, 4 分
 所以居民人均收入 (元/月) 的中位数在 $(4000, 5000]$ 之间, 5 分
 因为 $4000 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{11}{32}}{\frac{25}{32} - \frac{11}{32}} \times 1000 = \frac{30500}{7} \approx 4357$, 6 分
 所以中位数约为 4357. 7 分
 (3) 列联表如下:

猪肉价格(元/千克) 人均收入(元/月)			
	(0, 50]	(50, 60]	合计
(0, 4000]	50	5	55
(4000, 6000]	70	35	105
合计	120	40	160

- 9 分
 因为 $K^2 = \frac{160 \times (50 \times 35 - 70 \times 5)^2}{55 \times 105 \times 120 \times 40} = \frac{1120}{99} \approx 11.313 > 7.879$, 11 分
 所以有 99.5% 的把握认为当月的猪肉价格与当地居民人均收入水平有关. 12 分

19. 解: (1) 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 不一定是等比数列. 1 分
理由如下:
若 $q = -1$, 则 $a_n + a_{n+1} = a_n(1+q) = 0$, 2 分
此时数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 不是等比数列; 3 分
若 $q \neq -1$, 则数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 一定是公比为 q 的等比数列.
故数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 不一定是等比数列. 4 分
(2) 由 $a_4 a_5 = 9a_6$, 且 $a_4 a_5 = a_3 a_6$, 5 分
得 $a_3 = 9$ 6 分
因为 $a_1 a_2 a_3 = 27$, 所以 $a_2^3 = 27$, 则 $a_2 = 3$, 7 分
所以 $q = \frac{9}{3} = 3, a_1 = 1$, 8 分
所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^{n-1}$ 9 分
故 $S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - \cdots + (-1)^n n + 4 \times \frac{1-3^n}{1-3}$ 10 分
当 n 为偶数时, $S_n = \frac{1}{2}n + 2(3^n - 1)$; 11 分
当 n 为奇数时, $S_n = \frac{1}{2}(n+1) - (n+1) + 2(3^n - 1) = -\frac{1}{2}(n+5) + 2 \cdot 3^n$ 12 分
20. (1) 解: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$ 1 分
因为曲线 $y = f(x)$ 的一条切线与直线 $y = \frac{e}{1-e}x$ 垂直, 所以这条切线的斜率为 $\frac{e-1}{e}$, 2 分
令 $\frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$, 得 $x = 1$, 3 分
所以切点为 $(1, -\frac{1}{e})$, 所求切线的方程为 $y + \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}(x-1)$, 即 $(e-1)x - ey - e = 0$ 5 分
(2) 证明: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{xe}$.
当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$ 6 分
所以 $f(x)_{\max} = f(e) = \ln e - \frac{e}{e} = 0$ 7 分
设函数 $g(x) = x^2 - \ln x - \frac{3}{4}$, 则 $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$.
当 $x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$ 8 分
所以 $g(x)_{\min} = g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ 9 分
因为 $\ln 2 > \ln \sqrt{e} - \frac{1}{2}$, 所以 $g(x)_{\min} > 0$ 11 分
又 $f(x) \leq f(x)_{\max} = 0$, 所以 $f(x) < x^2 - \ln x - \frac{3}{4}$ 12 分
21. 解: (1) 由题意, 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 则 $Q(0, b), c^2 = e^2 a^2 = \frac{3}{4} a^2, b^2 = a^2 - c^2 = \frac{1}{4} a^2$, 1 分
 $F_1 \vec{Q} \cdot F_2 \vec{Q} = -c^2 + b^2 = -\frac{1}{2} a^2 = -8$, 因此 $a^2 = 16, b^2 = 4$, 3 分
故 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 4 分
(2) 由(1)可知 $A(-4, 0), B(4, 0)$, 可设动点 P 为 $(8, m)$,
则 AP 所在直线的方程为 $y = \frac{m}{12}(x+4)$, BP 所在直线的方程为 $y = \frac{m}{4}(x-4)$ 5 分
设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = \frac{m}{12}(x+4), \end{cases}$ 得 $(36+m^2)x^2 + 8m^2x + 16m^2 - 576 = 0$,
 $-4x_1 = \frac{16m^2 - 576}{36+m^2}, x_1 = \frac{144-4m^2}{36+m^2}, y_1 = \frac{24m}{36+m^2}$, 6 分
 $M(\frac{144-4m^2}{36+m^2}, \frac{24m}{36+m^2})$, 同理可得 $N(\frac{4m^2-16}{4+m^2}, \frac{-8m}{4+m^2})$ 7 分
根据椭圆的对称性, 若存在定点 G , 则点 G 必在 x 轴上.

当直线 MN 的斜率不存在时, $\frac{4m^2}{4+m^2} - \frac{16}{36+m^2} = \frac{144}{36+m^2}$, 解得 $m^2 = 12$,

此时直线 MN 的方程为 $x = 2$, 得 $G(2, 0)$ 8 分

当 $m = 0$ 时, 直线 MN 的方程为 $y = 0$, 直线 MN 过点 $G(2, 0)$ 9 分

当 $m \neq 0$ 且直线 MN 的斜率存在时, $k_{GM} = \frac{\frac{24m}{36+m^2}}{\frac{144-4m^2}{36+m^2} - 2} = \frac{4m}{12-m^2}$,

$k_{GN} = \frac{\frac{-8m}{4+m^2}}{\frac{4m^2}{4+m^2} - 2} = \frac{4m}{12-m^2} = k_{GM}$, 所以 M, N, G 三点共线,

则直线 MN 过点 $G(2, 0)$ 11 分

综上, 存在定点 G , 且 G 的坐标为 $(2, 0)$ 12 分

22. 解: (1) 由 $\begin{cases} x = 4\cos \alpha, \\ y = -4 + 4\sin \alpha, \end{cases}$ 得 $x^2 + (y+4)^2 = 16$, 2 分

即 $x^2 + y^2 + 8y = 0$ 3 分

则 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 8\rho\sin \theta = 0$ 4 分

即 $\rho + 8\sin \theta = 0$ (或 $\rho = -8\sin \theta$). 5 分

(2) 因为 l 的极坐标方程为 $3\rho\cos \theta + 4\rho\sin \theta = m$,

所以 l 的直角坐标方程为 $3x + 4y - m = 0$ 7 分

由 (1) 知, 曲线 C 表示圆心为 $C(0, -4)$, 半径为 4 的圆, 8 分

则 C 到 l 的距离 $d = \frac{|m+16|}{5} < 4$ 9 分

解得 $36 < m < 4$. 即 m 的取值范围为 $(-36, 4)$ 10 分

23. 解: (1) 由 $f(x) > 1 + |x-a|$, 得 $|x-3a| > 1$, 1 分

则 $x-3a < -1$ 或 $x-3a > 1$, 3 分

即 $x < 3a-1$ 或 $x > 3a+1$,

故不等式 $f(x) > 1 + |x-a|$ 的解集为 $(-\infty, 3a-1) \cup (3a+1, +\infty)$ 5 分

(2) 因为 $f(x) = |x-a| + |x-3a| \geq |x-a - (x-3a)| = |2a|$, 6 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $|2a|$ 7 分

因为 $f(x) > \sqrt{a+18}$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以 $\sqrt{a+18} < |2a|$, 8 分

又 $a+18 \geq 0$, 所以 $a \in [-18, -2) \cup (-\frac{9}{4}, +\infty)$ 10 分