理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	A	B	D	C	D	C	D	D	B	A

【解析】

1．$B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=\{1\}$，故选 A．

2．$z=\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}\mathrm{i}$，$\therefore \bar{z}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}\mathrm{i}$，故选 D．

3．$\because \log_{0.5}0.2>\log_{0.5}0.5=1$，$\therefore a>1$，又$c=0.2^{0.5}<0.2^{0.2}<0.5^{0.2}<0.5^{0}=1$，$\therefore 1>b>c$，

$\therefore a>b>c$，故选 A．

4．该几何体是一个 4 个面都是直角三角形的三棱锥，如图 1 所示，

$\therefore S_{表面积}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times2+\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2+\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times2+\dfrac{1}{2}\times2\times2=4+4\sqrt{2}$，故选 B．

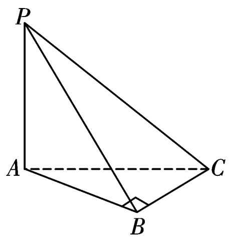

图 1

5．不超过 20 的素数有 2，3，5，7，11，13，17，19，共 8 个，从中取出 2 个不同的数有 28 种，其中取出的两个数之差的绝对值为 2 的有(3，5)，(5，7)，(11，13)，(17，19)，共 4 种，所以所求的概率是$\dfrac{4}{28}=\dfrac{1}{7}$，故选 D．

6．$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos60^\circ=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$，$\therefore(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=-1$，$\because|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{4-4+4}=2$，$\therefore\cos\langle\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{b}\rangle=\dfrac{(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\times1}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是120°，故选 C．

7．$a_1+a_3+a_5=a_1(1+q^2+q^4)=1+q^2+q^4=7$，$\therefore q^2=2$或$-3$，$\therefore a_3a_5a_7=a_1q^2a_1q^4a_1q^6=a_1^{\ 3}\cdot q^{12}=(q^2)^6=64$，故选 D．

8．选项 A：$f(-\pi+x)=f(x)$，故 A 正确；选项 B：$f\left(\dfrac{7}{12}\pi\right)=\sin\dfrac{3}{2}\pi=-1$，故 B 正确；选项 C：$\because x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$，$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$，$y=\sin x$在$\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$上不单调，故 C 错误；选项 D：$y=\sin 2x$向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位得到$y=\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，故 D 正确，故选 C.

9．$\because BF$ 垂直于 x 轴，$\therefore B\left(c,\ \dfrac{b^2}{a}\right)$，$\because A(-a,\ 0)$，$\therefore k_{AB}=\dfrac{\dfrac{b^2}{a}-0}{c+a}=2$，$\therefore \dfrac{b^2}{a}=2(c+a)$，$\therefore b^2=2a(c+a)$，$\therefore c^2-a^2=2ac+2a^2$，$\therefore c^2-2ac-3a^2=0$，$\therefore e^2-2e-3=0$，$\therefore e=3$ 或 -1（舍），故选 D.

10．易知 Rt△ABC 的外接圆直径为 AC，所以半径长为 $\dfrac{5}{2}$，设外接球半径为 R，则 $R^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{17}{2}$，$\therefore S_1=4\pi R^2=34\pi$，设 Rt△$ABC$ 的内切圆半径为 r，则 $\dfrac{1}{2}\times(3+4+5)\square r=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4$，$\therefore r=1$，$\because 2r=2<3$，故该直三棱柱内半径最大的球的半径为 r，$\therefore S_2=4\pi r^2=4\pi$，$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{34\pi}{4\pi}=\dfrac{17}{2}$，故选 D.

11．设直线 $y=k(x-1)$，由$\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=3x, \end{cases}$得 $ky^2-3y-3k=0$，设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则有 $y_1+y_2=\dfrac{3}{k}$①，$y_1y_2=-3$②，又 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，$\therefore y_1=-3y_2$③，由②③得$\begin{cases} y_1=3, \\ y_2=-1 \end{cases}$或$\begin{cases} y_1=-3, \\ y_2=1 \end{cases}$（舍），代入①得 $y_1+y_2=\dfrac{3}{k}=2$，$\therefore k=\dfrac{3}{2}$，故选 B.

12．$f(x)=\dfrac{1-\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，设 $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，则 $f(x)=\dfrac{1}{2}+g(x)$，$\therefore a=f(\ln 2)=\dfrac{1}{2}+g(\ln 2)$，$b=f(\ln\dfrac{1}{2})=f(-\ln 2)=\dfrac{1}{2}+g(-\ln 2)$，又 $g(-x)=-g(x)$，$\therefore g(x)$ 为奇函数，$\therefore g(\ln 2)+g(-\ln 2)=0$，$\therefore a+b=1+g(\ln 2)+g(-\ln 2)=1$，故选 A.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	[0，3]	60	803	②④

【解析】

13．作出可行域如图 2 中阴影部分所示，其中 $A(1,\ 2)$，$B(1,\ -1)$，$C(3,\ 0)$，$z=\dfrac{x+y}{x}=\dfrac{y}{x}+1$，令 $k=\dfrac{y}{x}$，则 $k=\dfrac{y}{x}$ 可看作可行域内的点 $(x,\ y)$ 与原点的连线的斜率，由图可知 $k\in[-1,\ 2]$，故 $z\in[0,\ 3]$．

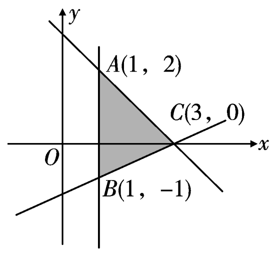

图 2

14．由题意得 $2^n=64$，则 $n=6$，展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\cdot x^r\cdot\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^{6-r}=\mathrm{C}_6^r\cdot(-2)^{6-r}x^{3r-12}$，令 $3r-12=0$，则 $r=4$，故常数项为 $T_5=\mathrm{C}_6^4(-2)^2=60$．

15．令 $p=1,\ q=n$，则 $a_{n+1}=a_1a_n=2a_n$，所以 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，$\therefore a_n=2^n$，当 $m=1$ 时，$b_1=0$；当 $2^n\leqslant m<2^{n+1}$ 时，$b_m=n$，$\therefore S_{150}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)+\cdots+(b_{64}+b_{65}+\cdots+b_{127})+(b_{128}+b_{129}+\cdots+b_{150})=0+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times2^6+7\times(150-127)=803$．

16．①当 $m=n>0$ 时，曲线 C 可化为 $x^2+y^2=\dfrac{1}{n}$，它表示半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的圆，故①错误；②当 $m>n>0$ 时，曲线 C 可化为 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{m}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，又 $0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$，所以曲线 C 表示焦点在 y 轴上椭圆，其离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}}}=\sqrt{\dfrac{m-n}{m}}$，故②正确；③当 $m=0,\ n>0$ 时，曲线 C 可化为 $y^2=\dfrac{1}{n}$，即 $y=\pm\sqrt{\dfrac{1}{n}}$，它表示两条与 x 轴平行的直线，故③错误；④当 $mn<0$ 时，曲线 C 是双曲线，令 $mx^2+ny^2=0$，则渐近线为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$，故④正确．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）$\because c\sin A=a\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\therefore \sin C\sin A=\sin A\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\because \sin A\neq 0$，$\therefore \sin C=\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C$，

$\therefore \sin C=\sqrt{3}\cos C$，$\therefore \tan C=\sqrt{3}$，

$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………（6 分）

（2）$c\cdot\cos B+b\cdot\cos C=c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=a$，$\therefore a=1$，

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

$\therefore b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin A}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A}{\sin A}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan A}$，

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore \dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \tan A>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore 0<\dfrac{1}{\tan A}<\sqrt{3}$，$\therefore 0<\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan A}<\dfrac{3}{2}$，

$\therefore b\in\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ……………………………………………（12 分）

（其他解法酌情给分）

18．（本小题满分 12 分）

（1）证明：取 AD 的中点 O，连接 OB，OP，BD，

$\because PA=PD$，$\therefore OP\perp AD$，$\because BD=AB$，$\therefore OB\perp AD$，

又 $OP\cap OB=O$，则 $AD\perp$ 平面 POB，

$\because PB\subset$ 平面 POB，$\therefore AD\perp PB$. ……………………………………………（6 分）

（2）解：由（1）知 $P-AD-B$ 的平面角为 $\angle POB$，

$\therefore \angle POB=120°$,

如图 3，以 O 为原点建立空间直角坐标系，则 $O(0,\ 0,\ 0)$，

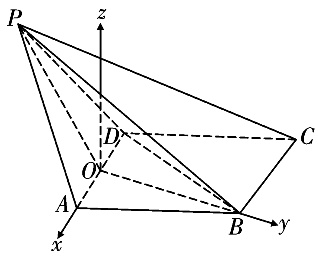

图 3

$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ \sqrt{3},\ 0)$，$C(-2,\ \sqrt{3},\ 0)$，$P\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$，

设平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，

$\because \overrightarrow{AP}=\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\ \sqrt{3},\ 0)$，

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AP}=-x_1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_1+\dfrac{3}{2}z_1=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=-x_1+\sqrt{3}y_1=0,\end{cases}\quad\therefore \overrightarrow{n_1}=(3,\ \sqrt{3},\ 3),$$

设平面 PBC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，

$\because \overrightarrow{CB}=(2,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{CP}=\left(2,\ -\dfrac{3}{2}\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$，

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{CB}=2x_2=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{CP}=2x_2-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}y_2+\dfrac{3}{2}z_2=0,\end{cases}\quad\therefore \overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ \sqrt{3}),$$

$$\therefore \cos\langle\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{\sqrt{21}\times 2}=\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

$\therefore A-PB-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）2×2 列联表如下：

	学习成绩优秀	学习成绩不优秀	合计
在校期间使用手机	20	80	100
在校期间不使用手机	40	10	50
合　计	60	90	150

K^2 的观测值 $k=\dfrac{150\times(20\times 10-40\times 80)^2}{100\times 50\times 60\times 90}=50>10.828$,

所以有99.9% 的把握认为“在校期间使用手机和学习成绩有关”.

……………………………………………………………………（6 分）

（2）从学习成绩优秀的学生中按在校是否使用手机分层抽样选出 6 人，

其中在校使用手机的学生有 $20\times\frac{6}{60}=2$ 人，

在校不使用手机的学生有 $40\times\frac{6}{60}=4$ 人.

X 可能的取值为0，1，2，

$P(X=0)=\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$,

$P(X=1)=\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{8}{15}$,

$P(X=2)=\frac{\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{1}{15}$,

∴X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

∴X 的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$. ……………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

（1）解：由题意得 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2-b^2=c^2,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a^2=8,\\ b^2=2,\\ c^2=6,\end{cases}$

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………（4 分）

（2）证明：当 l 的斜率不存在时，设 l：$x=t(-2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2})$,

则 $A\left(t,\ \frac{\sqrt{8-t^2}}{2}\right)$，$B\left(t,\ -\frac{\sqrt{8-t^2}}{2}\right)$,

$$\therefore k_{PA}+k_{PB}=\frac{\frac{\sqrt{8-t^2}}{2}+1}{t+2}+\frac{-\frac{\sqrt{8-t^2}}{2}+1}{t+2}=\frac{2}{t+2}=-1,$$

$\therefore t=-4$ (不符合题意);

当 l 的斜率存在时，设 l： $y=kx+m\ (m\neq 2k-1)$,

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-8=0$,

$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-8)>0$,

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则

$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-8}{4k^2+1}$,

又点 $P(-2,\ -1)$，$\therefore k_{PA}=\dfrac{y_1+1}{x_1+2}$，$k_{PB}=\dfrac{y_2+1}{x_2+2}$,

$$\therefore k_{PA}+k_{PB}=\frac{(kx_1+m)+1}{x_1+2}+\frac{(kx_2+m)+1}{x_2+2}$$

$$=\frac{k(x_1+2)+m-2k+1}{x_1+2}+\frac{k(x_2+2)+m-2k+1}{x_2+2}$$

$$=k+\frac{m-2k+1}{x_1+2}+\left(k+\frac{m-2k+1}{x_2+2}\right)$$

$$=2k+(m-2k+1)\left(\frac{1}{x_1+2}+\frac{1}{x_2+2}\right)$$

$$=2k+(m-2k+1)\cdot\frac{x_1+x_2+4}{(x_1+2)(x_2+2)}$$

$$=2k+(m-2k+1)\cdot\frac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$$

$$=2k+(m-2k+1)\cdot\frac{\frac{16k^2-8km+4}{4k^2+1}}{\frac{16k^2+4m^2-4-16km}{4k^2+1}}$$

$$=2k+(m-2k+1)\cdot\frac{4k^2-2km+1}{(2k-m)^2-1}$$

$$=2k+\frac{-4k^2+2km-1}{2k-m+1}=-1,$$

$\therefore m=4k$,

$\therefore$ 直线 l ： $y=k(x+4)$,

$\therefore$ 直线 l 恒过定点 $(-4,\ 0)$. ……………………………………………………（12 分）

（其他解法酌情给分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1） $f'(x)=a\mathrm{e}^x-1+x$,

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线与 x 轴平行，

$\therefore f'(0)=a-1=0$, $\therefore a=1$,

$\therefore f(x)=\mathrm{e}^x-x+\dfrac{1}{2}x^2$,

$\therefore f'(x)=\mathrm{e}^x-1+x$,

又 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $f'(0)=0$,

$\therefore$ 存在唯一的 $x=0$ 使得 $f'(0)=0$,

令 $f'(x)>0$, 得 $x>0$;

令 $f'(x)<0$, 得 $x<0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上单调递减，在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增. ……………………………（6 分）

（2） $F(x)=\mathrm{e}^x-x+\dfrac{1}{2}x^2-\left(\dfrac{1}{2}x^2+m\right)=\mathrm{e}^x-x-m$,

令 $F(x)=0$, 即 $\mathrm{e}^x-x-m=0$ 在 $[-1,\ 2]$ 上有两个实根，

$\because F'(x)=\mathrm{e}^x-1$, 令 $F'(x)=0$, 得 $x=0$,

令 $F'(x)>0$, 得 $x>0$;

令 $F'(x)<0$, 得 $x<0$,

$\therefore F(x)$ 在 $[-1,\ 0)$ 上单调递减，在 $(0,\ 2]$ 上单调递增，

$\because \mathrm{e}^x-x-m=0$ 在 $[-1,\ 2]$ 上有两个实根，

$$\therefore \begin{cases} F(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1-m\geqslant 0, \\ F(0)=1-m<0, \\ F(2)=\mathrm{e}^2-2-m\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 1<m\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}+1,$$

$\therefore m\in\left(1,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}+1\right]$. ……………………………………………………（12 分）

（其他解法酌情给分）

22．（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）直线 l 可化为 $x+y-2=0$，

设 l 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=-1$，$\therefore \alpha=135°$，

$\because \rho=2\cos\theta$，$\therefore \rho^2=2\rho\cos\theta$，$\therefore x^2+y^2=2x$，

故曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$. ……………………………………（5 分）

（2）曲线 C 表示圆心为 $C(1,\ 0)$，半径 $r=1$ 的圆，

$\because$ 圆心 $C(1,\ 0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|1+0-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore |AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，

又点 P 到 l 的最大距离为 $d+r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$，

$\therefore S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h\leqslant\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. ……………………………（10 分）

23．（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：（1）$f(x)=\begin{cases}-3x-2, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 3x+2, & x>0,\end{cases}$ 如图 4 所示，

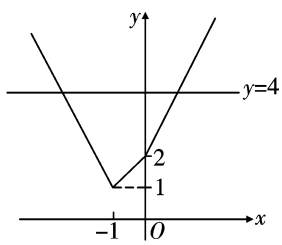

图 4

当 $f(x)=4$ 时，$x=-2$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$，

由图可知不等式 $f(x)<4$ 的解集为 $\left\{x\left|-2<x<\dfrac{2}{3}\right.\right\}$. ……………………………（5 分）

（2）由图可知当 $x=-1$ 时，$f(x)_{\min}=1$，

$\therefore 2a^2-a\leqslant 1$，$\therefore 2a^2-a-1\leqslant 0$，$\therefore -\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$，

$\therefore a\in\left[-\dfrac{1}{2},\ 1\right]$. ……………………………………………………（10 分