

高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围：新高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 \leq 1\}$, $B = \{x | -2 < x < 0\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $[-1, 0)$ B. $(-2, 1]$ C. $(-1, 0]$ D. $[-2, 1]$

2. 已知 i 是虚数单位，则 $\frac{2-i}{i} =$

- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $-1-2i$ D. $-1+2i$

3. 甲、乙两人下棋，和棋的概率为 50%，甲不输的概率为 90%，则乙不输的概率为

- A. 60% B. 50% C. 40% D. 30%

4. $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^9$ 的展开式中常数项为

- A. -84 B. -672 C. 84 D. 672

5. 国防部新闻发言人在 9 月 24 日举行的例行记者会上指出：“台湾是中国不可分割的一部分，解放军在台海地区组织实兵演练，展现的是捍卫国家主权和领土完整的决心和能力”。如图为我空军战机在海面上空绕台巡航。已知

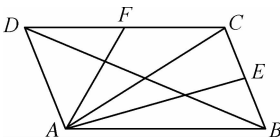


海面上的大气压强是 760 mmHg，大气压强 p (单位：mmHg) 和高度 h (单位：m) 之间的关系为 $p = 760e^{-kh}$ (e 是自然对数的底数， k 是常数)。根据实验知 500 m 高空处的大气压强是 700 mmHg，则我战机在 1 000 m 高空处的大气压强约是 (结果保留整数)

- A. 645 mmHg B. 646 mmHg
C. 647 mmHg D. 648 mmHg

6. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E, F 分别是 BC, CD 的中点，已知 $AE = \sqrt{5}$, $AF = \sqrt{2}$, 则 $\vec{AC} \cdot \vec{BD} =$

- A. -6 B. -4
C. $-\sqrt{10}$ D. $-\sqrt{7}$



7. 在公差为 1 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = t$, $b_n = \frac{a_n}{a_n + 1}$, 若对任意的正整数 n , $b_n \leq b_9$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是

- A. $\left(-\frac{19}{2}, -9\right)$ B. $(-9, -8)$
C. $\left(-10, -\frac{19}{2}\right)$ D. $(-10, -9)$

8. 已知 $f(x) = x|x|$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(ax^2) + 4f(3-x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的最小值是

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{8}$

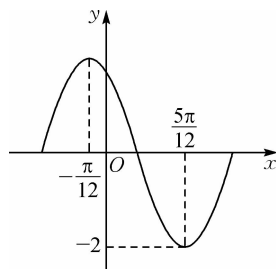
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分。

9. 下列命题为真命题的是

- A. 若 $a > b$, 则 $2^{a-b} > \frac{1}{2}$ B. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{\lg a}{\lg b} > 1$
C. 若 $a > 0, b > 0$, 则 $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ D. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$

10. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再将所得函数图象上的所有点的横坐标变为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍, 得到函数 $g(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的图象. 已知函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示, 则下列关于函数 $f(x)$ 的说法正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$
B. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减
C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{9}$ 对称
D. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{9}, 0\right)$ 成中心对称

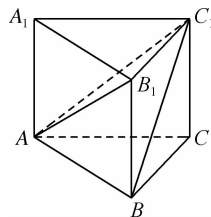


11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$), 若圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 与双曲线 C 的渐近线相切, 则

- A. 双曲线 C 的实轴长为 6
B. 双曲线 C 的离心率 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
C. 点 P 为双曲线 C 上任意一点, 若点 P 到 C 的两条渐近线的距离分别为 d_1, d_2 , 则 $d_1 d_2 = \frac{3}{4}$
D. 直线 $y = k_1 x + m$ 与 C 交于 A, B 两点, 点 D 为弦 AB 的中点, 若 OD (O 为坐标原点) 的斜率为 k_2 , 则 $k_1 k_2 = \frac{1}{3}$

12. 《九章算术》是我国古代数学名著, 它在几何学中的研究比西方早一千多年, 在《九章算术》中, 将底面为直角三角形, 且侧棱垂直于底面的三棱柱称为堑堵; 阳马指底面为矩形, 一侧棱垂直于底面的四棱锥; 鳖臑指四个面均为直角三角形的四面体. 如图, 在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC, C_1C = BC = 2$, 则下列说法正确的是

- A. 四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 为阳马
B. 三棱锥 C_1-ABC 为鳖臑
C. 当三棱锥 C_1-ABC 的体积最大时, $AC = \sqrt{2}$
D. 记四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 的体积为 V_1 , 三棱锥 C_1-ABC 的体积为 V_2 , 则 $V_1 = 3V_2$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{3}$, 则 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) =$ _____.

14. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = x$ 的焦点, 点 A, B 在抛物线上, 且分别位于 x 轴的上、下两侧, 若 $\triangle BFO$ 的面积是 $\frac{1}{2}$ (O 为坐标原点), 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 12$, 则直线 AB 的斜率是_____.

15. 经纬度是经度与纬度的合称,它们组成一个坐标系统,称为地理坐标系,它是一种利用三度空间的球面来定义地球上的空间的球面坐标系统,能够标示地球上的任何一个位置. 经度是个二面角,是两个经线平面(经线与地轴所成的半平面)的夹角,某一点的经度,就是该点所在的经线平面与本初子午线平面间的夹角. 纬度是个线面角,某一点的纬度是指该点与地球球心的连线和地球赤道面所成的线面角. 城市 A 位置东经 120° ,北纬 48° ,城市 B 位置为东经 120° ,北纬 18° ,若地球的半径为 R ,则过 A, B 两点和地心的平面截球所得的截面圆的劣弧 AB 的长为_____.

16. 若函数 $f(x)=e^x-2x$ 图象在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y=kx+b$,则 $k-b$ 的最小值为_____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在① $\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B=\sin A\sin C$,② $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\cos B+\frac{1}{2}$,③ $c\cdot\cos A+a\cdot\cos C=2b\cdot\cos B$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,并给出解答.

问题:在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c , $\sin A=2\sin C,b=2$,且_____. 求 $\triangle ABC$ 的面积.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

- (1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2)若 $b_n=\log_{a_n} 2$,则在数列 $\{b_n\}$ 中是否存在连续的两项,使得它们与后面的某一项依原来顺序构成等差数列? 若存在,请将这样的两项都探究出来;若不存在,请说明理由.

19. (本小题满分 12 分)

电子邮件是一种用电子手段提供信息交换的通信方式,是互联网应用最广的服务. 通过网络的电子邮件系统,用户可以以非常低廉的价格(不管发送到哪里,都只需负担网费)、非常快速的方式(几秒钟之内可以发送到世界上任何指定的目的地),与世界上任何一个角落的网络用户联系. 我们在用电子邮件时发现了一个有趣的现象,中国人的邮箱名称里含有数字的比较多,而外国人邮箱名称里含有数字的比较少. 为了研究邮箱名称里含有数字是否与国籍有关,随机调取 40 个邮箱名称,其中中国人的 20 个,外国人的 20 个,在 20 个中国人的邮箱名称中有 15 个含数字,在 20 个外国人的邮箱名称中有 5 个含数字.

(1)根据以上数据填写 2×2 列联表:

	中国人	外国人	总计
邮箱名称里有数字			
邮箱名称里无数字			
总计			40

(2) 能否有 99% 的把握认为“邮箱名称里含有数字与国籍有关”?

(3) 用样本估计总体, 将频率视为概率. 在中国人邮箱名称里和外国人邮箱名称里各随机调取 6 个邮箱名称, 记“6 个中国人邮箱名称里恰有 3 个含数字”的概率为 P_1 , “6 个外国人邮箱名称里恰有 3 个含数字”的概率为 P_2 , 试比较 P_1 与 P_2 的大小.

附: 临界值参考表与参考公式

$P(K^2 \geq K_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
K_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

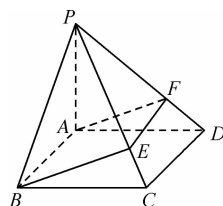
$$(K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n=a+b+c+d)$$

20. (本小题满分 12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp AD$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=2$, $PA=AD=3$. 点 E 在线段 PC 上(端点除外), 平面 ABE 交 PD 于点 F .

(1) 求证: 四边形 $ABEF$ 为直角梯形;

(2) 若 $AF = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 求直线 PC 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值.

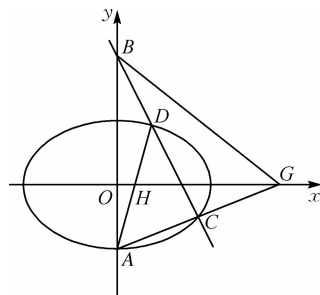


21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 过 F_1 且斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 的直线与椭圆的一个交点在 x 轴上的射影恰好为 F_2 .

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 如图, 下顶点为 A , 过点 $B(0, 2)$ 作一条与 y 轴不重合的直线, 该直线交椭圆 E 于 C, D 两点, 直线 AD, AC 分别交 x 轴于点 H, G . 求证: $\triangle ABG$ 与 $\triangle AOH$ 的面积之积为定值, 并求出该定值.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x - 1 + [a(x-1) - 1] \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a \geq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极小值;

(2) 当 $a < 0$ 时, 若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.