

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. B 因为集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | -2 < x < 0\}$, 所以 $A \cup B = \{x | -2 < x \leq 1\}$. 故选 B.
2. C $\frac{2-i}{i} = \frac{(2-i)(-i)}{i \times (-i)} = -1 - 2i$. 故选 C.
3. A 设 $A = \{\text{甲获胜}\}$, $B = \{\text{甲不输}\}$, $C = \{\text{甲乙和棋}\}$, 则 A, C 互斥, 且 $B = A + C$, 则 $P(B) = P(A + C) = P(A) + P(C)$, 即 $P(A) = P(B) - P(C) = 40\%$, 乙获胜的概率为 10% , 则乙不输的概率为 60% . 故选 A.
4. B $T_{r+1} = C_9^r (\sqrt{x})^{9-r} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r C_9^r x^{\frac{9-3r}{2}}$, 令 $9-3r=0$, 得 $r=3$, 所以常数项为 $(-2)^3 \times C_9^3 = -8 \times 84 = -672$. 故选 B.
5. A 当 $h=500$ 时, $p=700$, 即 $e^{-500k} = \frac{35}{38}$, 所以 $1\ 000$ m 高空处的大气压强约为 $p = 760e^{-1\ 000k} = 760(e^{-500k})^2 = 760 \times \left(\frac{35}{38}\right)^2 = \frac{12\ 250}{19} \approx 645$. 故选 A.
6. B 设 $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}$. 两式相加、相减易得 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE})$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 2(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE})$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}) \cdot 2(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}) = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AF}^2 - \overrightarrow{AE}^2) = -4$. 故选 B.
7. D 由题意知 $a_n = n + t - 1$, 所以 $b_n = \frac{n+t-1}{n+t} = 1 - \frac{1}{n+t}$, 所以点 (n, b_n) 在函数 $f(x) = 1 - \frac{1}{x+t}$ 的图象上; 由 $b_n \leq b_9$ 知, b_9 为数列 $\{b_n\}$ 的最大项, 所以 $9 < -t < 10$, 所以 $-10 < t < -9$. 故选 D.
8. C 因为 $f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 所以 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(ax^2) \geq -4f(3-x) = f(2x-6)$, 所以 $ax^2 \geq 2x-6$, 所以问题转化为“对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $ax^2 - 2x + 6 \geq 0$ 恒成立”. 当 $a=0$ 时显然不成立, 则 $a \neq 0$ 时, $\begin{cases} a > 0, \\ (-2)^2 - 4 \times a \times 6 \leq 0. \end{cases}$ 解得 $a \geq \frac{1}{6}$. 故选 C.
9. AC 对于 A, 因为 $a > b$, 所以 $a-b > 0$, 所以 $2^{a-b} > 1 > \frac{1}{2}$, 故 A 正确; 对于 B, $a=10, b=\frac{1}{10}, \frac{\lg a}{\lg b} > 1$ 不成立; 对于 C, 因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $\sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{2ab}{a+b}$, 故 C 正确; 对于 D, 当 $c=0$ 时不成立. 故选 AC.
10. BC 由图象可得 $A=2, T=\pi, g\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2$, 所以 $\omega=2, -\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 由 $|\varphi| < \pi$, 即 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 得 $g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 将 $g(x)$ 的图象上的所有点的横坐标变为原来的 $\frac{2}{3}$ 倍, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $f(x)$ 的图象, 即 $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$, 当 $x = \frac{\pi}{9}$ 时, $f(x)$ 取最大值, 所以 $f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{9}$ 对称, 当 $x \in \left[\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $3x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right]$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 单调递减. 故选 BC.
11. BCD 由题意知 C 的渐近线方程为 $x \pm ay = 0$, 所以 $\frac{|2|}{\sqrt{1+a^2}} = 1$, 解得 $a = \sqrt{3}$, 所以半焦距 $c=2$, 所以 $e = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 A 错误; B 正确; 设 $P(x_0, y_0)$, 所以 $d_1 = \frac{|x_0 - \sqrt{3}y_0|}{2}, d_2 = \frac{|x_0 + \sqrt{3}y_0|}{2}$, 所以 $d_1 d_2 = \frac{|x_0 - \sqrt{3}y_0|}{2} \cdot \frac{|x_0 + \sqrt{3}y_0|}{2} =$

$\frac{|x_0^2 - 3y_0^2|}{4} = \frac{3}{4}$, 故 C 正确; 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由点差法易得 $k_1 k_2 = \frac{1}{3}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

12. ABC 型堵 $ABC - A_1 B_1 C_1$ 为直三棱柱, 其中侧棱 $A_1 A \perp$ 平面 ABC , $A_1 ACC_1$ 为矩形, $AB \perp AC$, 则四棱锥 $B - A_1 ACC_1$ 为阳马; 三棱锥 $C_1 - ABC$ 中, $C_1 C \perp$ 平面 ABC , $BA \perp$ 平面 ACC_1 , 则三棱锥 $C_1 - ABC$ 的四个面均为直角三角形, 所以三棱锥 $C_1 - ABC$ 为鳖臑; 三棱锥 $C_1 - ABC$ 的体积最大时, 由于高 $C_1 C = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积最大, 而 $BC = 2$, 所以 $AB^2 + AC^2 = 4$, 所以 $AB \cdot AC \leq \frac{AB^2 + AC^2}{2} = 2$, 当且仅当 $AB = AC = \sqrt{2}$ 时, 取等号, 即当 $AC = \sqrt{2}$ 时, $\triangle ABC$ 面积取得最大值, 三棱锥 $C_1 - ABC$ 的体积最大; $V_1 = \frac{1}{3} \times AC \times CC_1 \times AB$, $V_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AC \times CC_1$, 则 $V_1 = 2V_2$. 故选 ABC.

13. $\frac{7}{9} \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{9}.$

14. $-\frac{1}{3}$ 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 由抛物线 $y^2 = x$ 得 $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, 而 $S_{\triangle BFO} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times (-y_2) = \frac{1}{2}$, 得 $y_2 = -4$, 则 $x_2 = 16$, 由 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 16x_1 - 4y_1 = 12$, 则 $4x_1 - y_1 = 3$, 又 $y_1^2 = x_1$, 结合 $y_1 > 0$, 解得 $y_1 = 1, x_1 = 1$, 所以直线 AB 的斜率是 $-\frac{1}{3}$.

15. $\frac{\pi R}{6}$ 设球心为 O , 由题意知劣弧所对的圆心角 $\angle AOB = 48^\circ - 18^\circ = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, 所以弧长为 $\frac{\pi R}{6}$.

16. $-2 - \frac{1}{e}$ 切点为 $(x_0, e^{x_0} - 2x_0)$, $f'(x) = e^x - 2$, 所以 $f'(x_0) = e^{x_0} - 2$, 则 $f(x)$ 图象在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $k = e^{x_0} - 2$, 则所求切线的方程为 $y = (e^{x_0} - 2)(x - x_0) + e^{x_0} - 2x_0$, 即 $y = (e^{x_0} - 2)x - e^{x_0} x_0 + e^{x_0}$, 则 $k = e^{x_0} - 2, b = -e^{x_0} x_0 + e^{x_0}$, 则 $k - b = e^{x_0} x_0 - 2$. 对于函数 $y = xe^x - 2, y' = e^x(x + 1)$, 当 $x < -1$ 时, $y' < 0$; 当 $x > -1$ 时, $y' > 0$; 所以函数 $y = xe^x - 2$ 在 $x = -1$ 取得极小值, 亦即最小值, 则 $k - b$ 的最小值为 $-2 - \frac{1}{e}$.

17. 解: 若选择条件①, 由正弦定理, 得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ 2 分

由余弦定理知 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$ 4 分

由 $0 < B < \pi$, 得 $B = \frac{\pi}{3}$, 5 分

由 $\sin A = 2\sin C$ 及正弦定理, 得 $a = 2c$, 6 分

将 $a = 2c$ 和 $b = 2$ 代入 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$, 解得 $c^2 = \frac{4}{3}$,

所以 $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}, a = 2c = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 8 分

所以 $S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 10 分

若选择条件②, 由已知, 得 $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin B + \frac{1}{2} \cos B = \cos B + \frac{1}{2}$, 1 分

即 $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin B - \frac{1}{2} \cos B = \frac{1}{2}$, 所以 $\sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ 3 分

由 $0 < B < \pi$, 得 $B = \frac{\pi}{3}$, 4 分

由余弦定理, 得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ 5 分

由 $\sin A = 2\sin C$ 及正弦定理, 得 $a = 2c$, 6 分

将 $a=2c$ 和 $b=2$ 代入 $a^2+c^2-b^2=ac$, 解得 $c^2=\frac{4}{3}$,

所以 $c=\frac{2\sqrt{3}}{3}, a=2c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 8 分

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 10 分

若选择条件③, 由正弦定理, 得 $\sin C \cdot \cos A + \sin A \cdot \cos C = 2\sin B \cos B$,

所以 $\sin(A+C) = 2\sin B \cos B$ 2 分

由 $A+C=\pi-B$, 得 $\sin B = 2\sin B \cos B$,

由 $\sin B \neq 0$, 解得 $\cos B = \frac{1}{2}$ 3 分

由 $0 < B < \pi$, 得 $B = \frac{\pi}{3}$, 4 分

由余弦定理, 得 $a^2+c^2-b^2=ac$ 5 分

由 $\sin A = 2\sin C$ 及正弦定理, 得 $a=2c$, 6 分

将 $a=2c$ 和 $b=2$ 代入 $a^2+c^2-b^2=ac$, 解得 $c^2=\frac{4}{3}$,

所以 $c=\frac{2\sqrt{3}}{3}, a=2c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 8 分

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 10 分

18. 解: (1) 由题意, 得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1) \cdot 2^{n+1}+2$, 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-2) \cdot 2^n+2$, 2 分

两式相减, 得 $na_n=(n-1) \cdot 2^{n+1}-(n-2) \cdot 2^n$, 即 $a_n=2^n$ 3 分

当 $n=1$ 时, $a_1=2$, 也满足上式, 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=2^n$ 5 分

(2) $b_n=\log_{a_n} 2=\frac{1}{\log_2 a_n}=\frac{1}{\log_2 2^n}=\frac{1}{n}$, 6 分

法一: $b_1=1, b_2=\frac{1}{2}$, 显然不适合; 7 分

$b_2=\frac{1}{2}, b_3=\frac{1}{3}$ 适合, 即 $b_2=\frac{1}{2}, b_3=\frac{1}{3}, b_6=\frac{1}{6}$ 构成公差为 $-\frac{1}{6}$ 的等差数列; 8 分

$b_3=\frac{1}{3}, b_4=\frac{1}{4}$ 适合, 即 $b_3=\frac{1}{3}, b_4=\frac{1}{4}, b_6=\frac{1}{6}$ 构成公差为 $-\frac{1}{12}$ 的等差数列; 9 分

当 $n \geq 4$ 时, 假设 $b_n, b_{n+1}, b_{n+k} (k \geq 2)$ 成等差数列, 则 $2b_{n+1}=b_n+b_{n+k}$, 10 分

即 $b_{n+k}=2b_{n+1}-b_n=\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n^2+n}=\frac{1}{n+2+\frac{2}{n-1}}$,

而当 $n \geq 4$ 时, $\frac{2}{n-1} \notin \mathbb{N}^*$, 所以 b_{n+k} 不是数列 $\{b_n\}$ 中的项, 所以当 $n \geq 4$ 时, 不存在连续两项, 使之与数列后面某一项依原顺序成等差数列. 11 分

综上, b_2, b_3 和 b_3, b_4 适合条件. 12 分

法二: $b_1=1, b_2=\frac{1}{2}$, 显然不适合; 7 分

当 $n \geq 2$ 时, 设 $b_n, b_{n+1}, b_{n+k} (k \geq 2)$ 成等差数列, 则 $2b_{n+1} = b_n + b_{n+k}$,

即 $\frac{2}{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+k}$, 解得 $k = 2 + \frac{2}{n-1}$ 8 分

当 $n = 2$ 时, $k = 4$, 则 $b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{1}{3}, b_6 = \frac{1}{6}$ 构成公差为 $-\frac{1}{6}$ 的等差数列; 9 分

当 $n = 3$ 时, $k = 3$, 则 $b_3 = \frac{1}{3}, b_4 = \frac{1}{4}, b_6 = \frac{1}{6}$ 构成公差为 $-\frac{1}{12}$ 的等差数列; 10 分

当 $n \geq 4$ 时, $\frac{2}{n-1} \notin \mathbb{N}^*$, 则 $k \notin \mathbb{N}^*$, 所以 b_{n+k} 不是数列 $\{b_n\}$ 中的项, 所以当 $n \geq 4$ 时, 不存在连续两项, 使之与数列后面某一项依原顺序成等差数列. 11 分

综上, b_2, b_3 和 b_3, b_4 适合条件. 12 分

19. 解: (1) 填写 2×2 列联表如下:

	中国人	外国人	总计
邮箱名称里有数字	15	5	20
邮箱名称里无数字	5	15	20
总计	20	20	40

..... 4 分

(2) $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{40(15 \times 15 - 5 \times 5)^2}{20 \times 20 \times 20 \times 20} = 10.000 > 6.635$ 7 分

因为根据临界值表可知, 所以有 99% 的把握认为“邮箱名称里含有数字与国籍有关”. 8 分

(3) 用样本估计总体, 将频率视为概率, 根据 (1) 中 2×2 列联表, 中国人邮箱名称里含数字的概率为 $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, 外国人邮箱名称里含数字的概率为 $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ 10 分

设“6 个中国人邮箱名称里含数字”的人数为随机变量 ξ , “6 个外国人邮箱名称里含数字”的人数为随机变量 η , 根据题意, 得 $\xi \sim B(6, \frac{3}{4}), \eta \sim B(6, \frac{1}{4})$,

则 $P_1 = C_6^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{6-3} = C_6^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3, P_2 = C_6^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{6-3} = C_6^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3$,

所以 $P_1 = P_2$ 12 分

20. (1) 证明: 因为 $AB \parallel CD, AB \subset \text{平面 } ABEF, CD \not\subset \text{平面 } ABEF$,

所以 $CD \parallel \text{平面 } ABEF$ 1 分

又 $CD \subset \text{平面 } PCD, \text{平面 } ABEF \cap \text{平面 } PCD = EF$,

所以 $CD \parallel EF$.

又 $EF < CD = AB$, 所以四边形 $ABEF$ 为梯形. 3 分

因为 $AB \perp AD, \text{平面 } PAD \perp \text{平面 } ABCD, \text{平面 } PAD \cap \text{平面 } ABCD = AD, AB \subset \text{平面 } ABCD$.

所以 $AB \perp \text{平面 } PAD$, 4 分

又 $AF \subset \text{平面 } PAD$, 所以 $AB \perp AF$,

所以四边形 $ABEF$ 为直角梯形. 5 分

(2) 解: 法一: 在直角三角形 PAD 中, $PD = 3\sqrt{2}, AF = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 $PD = 2AF$,

所以 F 为 PD 的中点, 又 $CD \parallel EF$, 所以 E 为 PC 的中点. 6 分

因为 $PA \perp AD$,

又由(1)知, $AB \perp$ 平面 PAD , 所以 AB, AD, AP 两两垂直. 7 分

以 A 为原点, 分别以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系

$A-xyz$, 则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,3,0), P(0,0,3)$, 从而 $E(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$,

所以 $\overrightarrow{BE} = (-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}), \overrightarrow{AB} = (2,0,0), \overrightarrow{PC} = (2,3,-3)$ 8 分

设平面 $ABEF$ 的法向量为 $\mathbf{m} = (a,b,c)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2a = 0, \\ -a + \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c = 0, \end{cases}$

取 $b=1$, 则 $\mathbf{m} = (0,1,-1)$ 10 分

设直线 PC 与平面 $ABEF$ 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PC}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{PC}| |\mathbf{m}|} = \frac{6}{\sqrt{22} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$,

故直线 PC 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{11}}{11}$ 12 分

法二: 因为 $PA \perp AD, PA=AD=3$. 所以 $PD=3\sqrt{2}$, 因为 $AF=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 所以 $PD=2AF$,

所以 F 为 PD 的中点, 所以 $AF \perp PD$ 6 分

由(1)知 $AB \perp$ 平面 PAD ,

又 $PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp PD$, 7 分

又 $AF \cap AB = A$, 所以 $PD \perp$ 平面 $ABEF$, 8 分

所以直线 PC 与平面 $ABEF$ 所成的角就是 $\angle PEF$, 又因为 $EF \parallel CD$, 所以 $\angle PEF = \angle PCD$ 9 分

又 $AB \parallel CD$, 所以 $CD \perp PD$,

所以 $\sin \angle PCD = \frac{PD}{PC} = \frac{PD}{\sqrt{PD^2 + CD^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$ 11 分

故直线 PC 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{11}}{11}$ 12 分

21. 解: (1) 过 $F_1(-1,0)$ 且斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 的直线方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{4}(x+1)$,

令 $x=1$, 则 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 由题意可得 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $a^2 = 2, b^2 = 1$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 由题意知, 直线 BC 的斜率存在, 设直线 BC 的方程为 $y = kx + 2$,

设 $D(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 将 $y = kx + 2$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 得 $(1+2k^2)x^2 + 8kx + 6 = 0$,

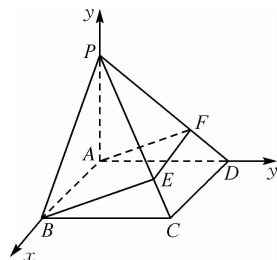
所以 $x_1 + x_2 = \frac{-8k}{1+2k^2}, x_1 x_2 = \frac{6}{1+2k^2}$, 由 $\Delta = 16k^2 - 24 > 0, k^2 > \frac{3}{2}$, 6 分

所以 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 4 = \frac{4}{1+2k^2}$,

$y_1 y_2 = (kx_1 + 2)(kx_2 + 2) = k^2 x_1 x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4 = \frac{4-2k^2}{1+2k^2}$, 8 分

直线 AD 的方程为 $y = \frac{y_1+1}{x_1}x - 1$, 令 $y=0$, 解得 $x = \frac{x_1}{1+y_1}$,

则 $H(\frac{x_1}{1+y_1}, 0)$, 同理可得 $G(\frac{x_2}{1+y_2}, 0)$, 10 分



$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle ABG} \cdot S_{\triangle AOH} &= \frac{1}{2} \times 1 \times \left| \frac{x_1}{1+y_1} \right| \times \frac{1}{2} \times 3 \times \left| \frac{x_2}{1+y_2} \right| = \frac{3}{4} \left| \frac{x_1 x_2}{(1+y_1)(1+y_2)} \right| \\ &= \frac{3}{4} \left| \frac{x_1 x_2}{1+y_1+y_2+y_1 y_2} \right| = \frac{3}{4} \left| \frac{\frac{6}{1+2k^2}}{1+\frac{4}{1+2k^2}+\frac{4-2k^2}{1+2k^2}} \right| = \frac{3}{4} \times \left| \frac{6}{1+2k^2+4+4-2k^2} \right| = \frac{3}{4} \times \frac{6}{9} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以 $\triangle ABG$ 与 $\triangle AOH$ 的面积之积为定值,该定值为 $\frac{1}{2}$ 12分

22. 解:(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = a + 1 + a \ln x - \frac{a+1}{x}$ 1分

设 $g(x) = a + 1 + a \ln x - \frac{a+1}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{a}{x} + \frac{a+1}{x^2} = \frac{ax+a+1}{x^2}$ 2分

当 $a \geq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $g(1) = 0$,
 当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 且 $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = 0$ 4分

(2) 当 $a < 0$ 时, 由(1)知 $g'(x) = \frac{ax+a+1}{x^2} = \frac{a(x+\frac{a+1}{a})}{x^2}$ 5分

(i) 当 $\frac{a+1}{a} \geq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 又 $g(1) = 0$.

当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为增函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为减函数,

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 满足题意. 7分

(ii) 当 $\frac{a+1}{a} < 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$ 得 $x = -\frac{a+1}{a}$,

① 当 $0 < -\frac{a+1}{a} < 1$, 即 $-1 < a < -\frac{1}{2}$ 时, 取 $x \in (-\frac{a+1}{a}, +\infty)$, 得 $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-\frac{a+1}{a}, +\infty)$ 上为减函数,

当 $-\frac{a+1}{a} < x < 1$ 时, $g(x) > g(1) = 0$, 即 $f'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $g(x) < g(1) = 0$, 即 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{a+1}{a}, 1)$ 上为增函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为减函数,

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 满足题意. 9分

② 当 $-\frac{a+1}{a} = 1$, 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) = -\frac{x-1}{2x^2}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为增函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为减函数, 所以 $f'(x) = g(x) \leq g(1) = 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 此时, $f(x)$ 无极大值. 10分

③ 当 $-\frac{a+1}{a} > 1$, 即 $0 > a > -\frac{1}{2}$ 时, 取 $x \in (1, -\frac{a+1}{a})$, 得 $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(1, -\frac{a+1}{a})$ 上为增函数,

当 $1 < x < -\frac{a+1}{a}$ 时, $g(x) > g(1) = 0$, 即 $f'(x) > 0$, 这与“ $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极大值”矛盾, 此时不满足题意.

综上, 所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 12分

(说明: 若学生由题易知 $f'(1) = 0$, 根据 $f''(1) < 0$ 转化求解, 这不是充要条件. 没有运用数学语言和数学符号进行代数推理, 可扣 2/3 的分)