

福州市 2021 届高三 10 月调研 A 卷

数学

命题组：黄炳锋，宋建辉，许丽丽，耿熹

（完卷时间 120 分钟；满分 150 分）

注意事项

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | 0 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 1, 2\}$ D. $\{1, 2\}$
2. 已知复数 $z = 1 + i$, $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数, 则 $\frac{1+z}{\bar{z}} =$
A. $\frac{3+i}{2}$ B. $\frac{1+3i}{2}$ C. $\frac{3+3i}{2}$ D. $\frac{1+i}{2}$
3. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $1 < x < 2$ ” 是 “ $|x-2| < 1$ ” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 十六世纪中叶, 英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把 “=” 作为等号使用, 后来英国数学家哈利奥特首次使用 “<” 和 “>” 符号, 并逐渐被数学界接受, 不等号的引入对不等式的发展影响深远. 若 $a > b > 0$, 则下列结论错误的是
A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\log_2(a-b) > 0$
C. $a^{\frac{1}{2}} > b^{\frac{1}{2}}$ D. $3^a > 3^b$

5. 已知两条直线 m, n 和两个平面 α, β ，下列命题正确的是
- A. 若 $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ，且 $m \perp n$ ，则 $\alpha \perp \beta$
- B. 若 $m // \alpha$ ， $n // \beta$ ，且 $m // n$ ，则 $\alpha // \beta$
- C. 若 $m \perp \alpha$ ， $n // \beta$ ，且 $m \perp n$ ，则 $\alpha \perp \beta$
- D. 若 $m \perp \alpha$ ， $n // \beta$ ，且 $m // n$ ，则 $\alpha // \beta$
6. 某校在一次月考中共有 800 人参加考试，其数学考试成绩 X 近似服从正态分布 $N(105, \sigma^2)$ ，试卷满分 150 分. 现已知同学甲的数学成绩为 90 分，学校排名为 720，同学乙的数学成绩为 120 分，那么他的学校排名约为
- A. 60 B. 70 C. 80 D. 90
7. 在边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC}$ ，则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BC} =$
- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2
8. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，且 $f(2) = 0$ ，则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是
- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
- C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ ，则下列说法正确的是
- A. 双曲线的离心率 $e = 2$ B. 双曲线的渐近线方程为 $\sqrt{3}x \pm y = 0$
- C. 双曲线的焦距为 $2\sqrt{2}$ D. 双曲线的焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$
10. 已知曲线 $C_1: y = \cos x$ ， $C_2: y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ，则下面结论正确的是
- A. 把曲线 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把得到的曲线上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到曲线 C_2

B. 把曲线 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把得到的曲线上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 得到曲线 C_2

C. 把曲线 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

D. 把曲线 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

11. 一盒中有 8 个乒乓球, 其中 6 个未使用过, 2 个已使用过. 现从盒子中任取 3 个球来用, 用完后再装回盒中. 记盒中已使用过的球的个数为 X , 则下列结论正确的是

A. X 的所有可能取值是 3, 4, 5

B. X 最有可能的取值是 5

C. X 等于 3 的概率为 $\frac{3}{28}$

D. X 的数学期望是 $\frac{17}{4}$

12. 已知函数 $f(x) = \sin(\sin x) + \cos(\cos x)$, 下列关于该函数结论正确的是

A. $f(x)$ 的一个周期是 2π

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

C. $f(x)$ 的最大值为 2

D. $f(x)$ 是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$, 则 $\{a_n\}$ 的前 21 项和 $S_{21} =$ _____.

14. 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线截圆 $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ 所得弦长为 2, 则抛物线的焦点坐标为_____.

15. 已知 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $2\cos 2\alpha + 15\sin \alpha + 2 = 0$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = 2$, $AC \perp BC$, 若该三棱锥的体积为 $\frac{2}{3}$, 则其外接球表面积的最小值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在① $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{2}$ ，② $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{6}$ ，③ $a_{n+1} = a_n + n - 8$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答。

问题：设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1 = 4$ ，_____，求 $\{a_n\}$ 的通项公式，并判断 S_n 是否存在最大值，若存在，求出最大值；若不存在，说明理由。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18. (12 分)

$\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $b(\sin C - \cos C) = c(\cos B - \sin B)$ 。

(1) 记 BC 边上的高为 h ，求 $\frac{a}{h}$ ；

(2) 若 $b = \sqrt{5}$ ， $c = 1$ ，求 a 。

19. (12 分)

某沙漠地区经过治理，生态系统得到改善。为调查该地区植物覆盖面积(单位：公顷)和某种野生动物的数量的关系，将该地区分成面积相近的 200 个地块，从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区，调查得到样本数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, 20$)，

其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积和这种野生动物的数量，并计算得

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 60, \sum_{i=1}^{20} y_i = 1200, \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 80, \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 9000, \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 800.$$

(1) 求样本 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, 20$) 的相关系数(精确到 0.01)，并用相关系数说明各样区的这种野生动物的数量与植物覆盖面积的相关性。

(2) 根据现有统计资料，各地块间植物覆盖面积差异很大。为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计，请给出一种你认为更合理的抽样方法，并说明理由。

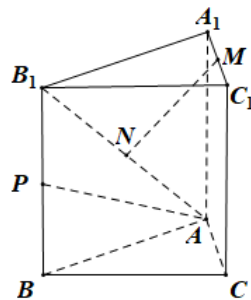
附：相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}}.$

20. (12 分)

已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AC=AA_1=1$, M, N 分别为 A_1C_1, AB_1 的中点.

(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 B_1BCC_1 ;

(2) 若 P 是 B_1B 的中点, $AP \perp MN$, 求二面角 A_1-PN-M 的余弦值.



21. (12 分)

设函数 $f(x) = \ln(x+a) + x^2$.

(1) 若当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极值, 求 a 的值, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值, 求 a 的取值范围, 并证明所有极值之和大于 $\ln \frac{e}{2}$.

22. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $l: y=2x$ 与椭圆交于两点

A, B , 且 $|AB| = 2\sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 C, D 为椭圆 E 上异于 A, B 的两个不同的点, 直线 AC 与直线 BD 相交于点 M , 直线 AD 与直线 BC 相交于点 N , 求证: 直线 MN 的斜率为定值.