哈师大附中三模(理科)数学答案

一、选择题:

DDDBD　DAABA　AC

二、填空题:

13. $\underline{-3}$;14. $\underline{216}$;15. $\underline{20}$;16. $\underline{(-\infty,-2),(-2,+\infty),[-1,2]}$

17. 选择条件是:________;$\triangle ABC$ ________　(1 分)

解:由已知:$2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=2$　$\therefore \sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$　(4 分)

$\because A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$　$\therefore A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$　$\therefore A=\frac{\pi}{3}$　(7 分)

选①:由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}$　$\therefore bc=4$　(8 分)

由余弦定理:$4=b^2+c^2-bc$　(10 分)

解得:$b=2,c=2$　(12 分)

选②:由已知:$b+c=2\sqrt{3}$

由余弦定理得:$4=b^2+c^2-bc$　(10 分)

解得:$a=\frac{4\sqrt{3}}{3},b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3},b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$　(12 分)

选③:由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$ 得:$bc=6$　(8 分)

由余弦定理:$4=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc$　$\therefore bc\leqslant 4$ 矛盾

$\therefore \triangle ABC$ 不存在　(12 分)

18. 解:(1)由已知得:小明中奖概率为$\frac{2}{3}$,小红中奖的概率为$\frac{2}{5}$.且两人中奖与否互不影响.(1 分)

设“这两人的累计得分 $X\leqslant 3$”为事件 A,则 A 的对立事件为“$X=5$”

$\because P(X=5)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$　(4 分)

$\therefore P(A)=1-P(X=5)=\frac{11}{15}$　(6 分)

(2)设小明、小红都选择方案甲,抽奖中奖次数为 X_1,都选择乙方案抽奖,中奖次数为 X_2,则这两人选择甲方案抽奖,累计得分的期望为 $E(2X_1)$,选择乙方案抽奖累计得分期望为$E(3X_2)$　(8 分)

由已知:$X_1\sim B\left(2,\frac{2}{3}\right)$;$X_2\sim B\left(2,\frac{2}{5}\right)$　(10 分)

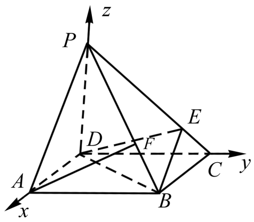
$\therefore E(X_1)=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3},E(X_2)=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore E(2X_1)=2E(X_1)=\frac{8}{3},E(3X_2)=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$

$\because E(2X_1)>E(3X_2)$

$\therefore$ 他们选择甲方案抽奖时,累计得分的期望较大　(12 分)

19.（1）$\because PD\perp$ 平面 $ABCD$，AD、$CD\subset$ 平面 $ABCD$.



$\therefore\ PD\perp AD, PD\perp CD$

在矩形 $ABCD$ 中，$AD\perp CD$

$\therefore DA$、DC、DP 三条线两两垂直　　（1 分）

如图，分别以 DA、DC、DP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系

则：$A(2,0,0)$，$B(2,4,0)$，$C(0,4,0)$，$P(0,0,4)$　　（2 分）

$\because\ \overrightarrow{PE}=3\overrightarrow{EC}\quad \therefore E(0,3,1)$；$\because \overrightarrow{PF}=2\overrightarrow{FB}\quad \therefore \overrightarrow{PF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PB}=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{8}{3}\right)$

$\therefore \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=(-2,0,4)+\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3},-\dfrac{8}{3}\right)=\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的一个法向量

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$ 得：$\begin{cases}2x+4y=0\\ 3y+z=0\end{cases}$ 取 $\vec{n}=(-2,1,-3)$　　（4 分）

$\because \overrightarrow{AF}\cdot\vec{n}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{3}-4=0$

$\therefore \overrightarrow{AF}\perp\vec{n}$

又 $\because AF\not\subset$ 平面 BDE

$\therefore AF\,/\!/$ 平面 BDE　　（7 分）

（2）假设存在 M 满足 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，使 $CM\perp$ 平面 BDE

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=(2,-4,0)+\lambda(-2,0,4)=(2-2\lambda,-4,4\lambda)$　　（8 分）

若 $CM\perp$ 平面 BDE，则 $\overrightarrow{CM}\,/\!/\,\vec{n}$

$\therefore\ \dfrac{2-2\lambda}{-2}=\dfrac{-4}{1}=\dfrac{4\lambda}{-3}$　　（10 分）

即：$\begin{cases}2-2\lambda=8\\ 12=4\lambda\end{cases}\quad \therefore \lambda\in\phi$

故不存在满足条件的点 M　　（12 分）

20. 解：（1）由已知：$C_2(4,0)$；C_1 的准线为：$x=-\dfrac{1}{4}$.　　（2 分）

$\therefore$ 圆心 C_2 到 C_1 准线距离为 $4-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{17}{4}$　　（3 分）

（2）设 $P(y_0^2,y_0)$，$A(y_1^2,y_1)\cdot B(y_2^2,y_2)$

切线 PA：$x-y_0^2=m_1(y-y_0)$

由 $\begin{cases}x=m_1y+y_0^2-m_1y_0\\ y^2=x\end{cases}$ 得：$y^2-m_1y-y_0^2+m_1y_0=0$

由 $y_0+y_1=m_1$　得：$y_1=m_1-y_0$

切线 PB：$x-y_0^2=m_2(y-y_0)$

同理可得：$y_2=m_2-y_0$

依题意：$C_2(4,0)$ 到 PA：$x-m_1y-y_0^2+m_1y_0=0$ 距离 $\dfrac{|4-y_0^2+m_1y_0|}{\sqrt{m_1^2+1}}=1$

整理得：$(y_0^2-1)m_1^2+(8y_0-2y_0^3)m_1+y_0^4-8y_0^2+15=0$

同理： $(y_0^2-1)m_2^2+(8y_0-2y_0^3)m_2+y_0^4-8y_0^2+15=0$

$\therefore\quad m_1+m_2=\dfrac{2y_0^3-8y_0}{y_0^2-1}\quad (y_0^2\neq 1)$ （9 分）

$\because\quad k_1=\dfrac{y_0}{y_0^2-4},k_2=\dfrac{y_1-y_2}{y_1^2-y_2^2}=\dfrac{1}{y_1+y_2}=\dfrac{1}{m_1+m_2-2y_0}=\dfrac{y_0^2-1}{-6y_0}$

$\therefore\quad k_1k_2=\dfrac{y_0}{y_0^2-4}\cdot\dfrac{y_0^2-1}{-6y_0}=-\dfrac{5}{24}.$

解得：$y=\pm 4$

故所求 P 点坐标为$(16,4)$或$(16,-4)$ （12 分）

21. 解：(1) 由已知：$f'(x)=a+1+\ln x$ （1 分）

依题意：$\begin{cases} f(e)=3e-3e=0=ae+e\ln x+b \\ f'(e)=a+1+\ln e=a+2=3 \end{cases}$

解得：$a=1,b=-2e$ （4 分）

(2) 由(1)知：$f(x)=x+x\ln x-2e$

$\dfrac{f(x)+2e}{x-1}>n$ 即：$\dfrac{x+x\ln x}{x-1}>n$

设：$g(x)=\dfrac{x+x\ln x}{x-1},(x>1)$ 原问题转化为 $g(x)_{\min}>n$ （5 分）

$g'(x)=\dfrac{(1+1+\ln x)(x-1)-(x+x\ln x)}{(x-1)^2}=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$

令 $h(x)=x-\ln x-2,(x>1)$

$\because h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$

$\therefore h(x)$在$(1,+\infty)$上递增.

又$\because\ h(3)=1\ln 3<0\quad h(4)=2-2\ln 2>0$

$\therefore\ h(x)$存在唯一零点，设为 $x_0,x_0\in(3,4)$

$h(x)>0\Rightarrow x>x_0,\quad h(x)<0\Rightarrow 1<x<x_0$

$\therefore\ g'(x)>0\Rightarrow x>x_0,\quad g'(x)<0\Rightarrow 1<x<x_0$

$\therefore\ g(x)$在$(1,x_0)$递减，$(x_0,+\infty)$上递增

$\therefore g(x)_{min}=g(x_0)=\dfrac{x_0+x_0\ln x_0}{x_0-1}$ （9 分）

$\because g'(x_0)=0\quad\therefore\ x_0-\ln x_0-2=0\quad\therefore\ \ln x_0=x_0-2$

$\therefore\ g(x)_{min}=\dfrac{x_0+x_0(x_0-2)}{x_0-1}=x_0\in(3,4)\quad\therefore\ x_0>n$ （11 分）

$\therefore\ n$ 的最大值为 3 （12 分）

22. 解：(1) 消参得 l 的普通方程为：$y=1-x$ （2 分）

$\because\ \rho^2=\dfrac{12}{3\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\quad \therefore\ 3\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta=12$

$\because\ \begin{cases}\rho\cos\theta=x\\ \rho\sin\theta=y\end{cases}\quad \therefore 3x^2+4y^2=12\quad \therefore \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

$\therefore$ C 的直角坐标方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1.$ （5 分）

(2) 设 A、B 对应参数为 t_1,t_2，则 M 对应参数为$\dfrac{t_1+t_2}{2}$

由 t 的几何意义知：$|PM|=\dfrac{|t_1+t_2|}{2}$

将$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 代入 $3x^2+4y^2-12=0$ 得：

$3x\ \dfrac{1}{2}t^2+4\left(\dfrac{t^2}{2}+\sqrt{2}t+1\right)-12=0\quad \therefore 7t^2+8\sqrt{2}t-16=0\quad \Delta>0$

$\therefore\ t_1+t_2=-\dfrac{8\sqrt{2}}{7}\quad \therefore |PM|=\dfrac{|t_1+t_2|}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$ （10 分）

23. (1) 解：当 $x<-1$ 时，$f(x)=1-2x-2x-2=-4x-1\geqslant 4\quad \therefore x\leqslant -\dfrac{5}{4}\quad \therefore\ x\leqslant -\dfrac{5}{4}$

当$-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$f(x)=1-2x+2x+2=3\geqslant 4\quad \therefore x\in\varnothing$

当$x>\dfrac{1}{2}$时，$f(x)=2x-1+2x+2=4x+1\geqslant 4\quad \therefore x\geqslant\dfrac{3}{4}\quad \therefore x\geqslant\dfrac{3}{4}$

$\therefore$ 不等式解集为：$\left(-\infty,-\dfrac{5}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$ （5 分）

(2) $f(x)=|2x-1|+|2x+2|=|1-2x|+|2x+2|\geqslant|(1-2x)+(2x+2)|=3$

当且仅当$(1-2x)(2x+2)\geqslant 0$，即：$-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}=3\quad \therefore m=3$ （7 分）

$\therefore\ a+2b+3c=3$

由柯西不等式可得：

$(a^2+b^2+c^2)(1^2+2^2+3^2)\geqslant(a+2b+3c)^2$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{3^2}{1^2+2^2+3^2}=\dfrac{9}{14}$

当且仅当$\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{3}$即：$a=\dfrac{3}{14},b=\dfrac{6}{14},c=\dfrac{9}{14}$时：$a^2+b^2+c^2$ 最小值为$\dfrac{9}{14}$ （10 分）