

哈师大附中 2021 年高三第三次模拟考试

理科数学

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡的相应位置上.
2. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号. 写在本试卷上无效.
3. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

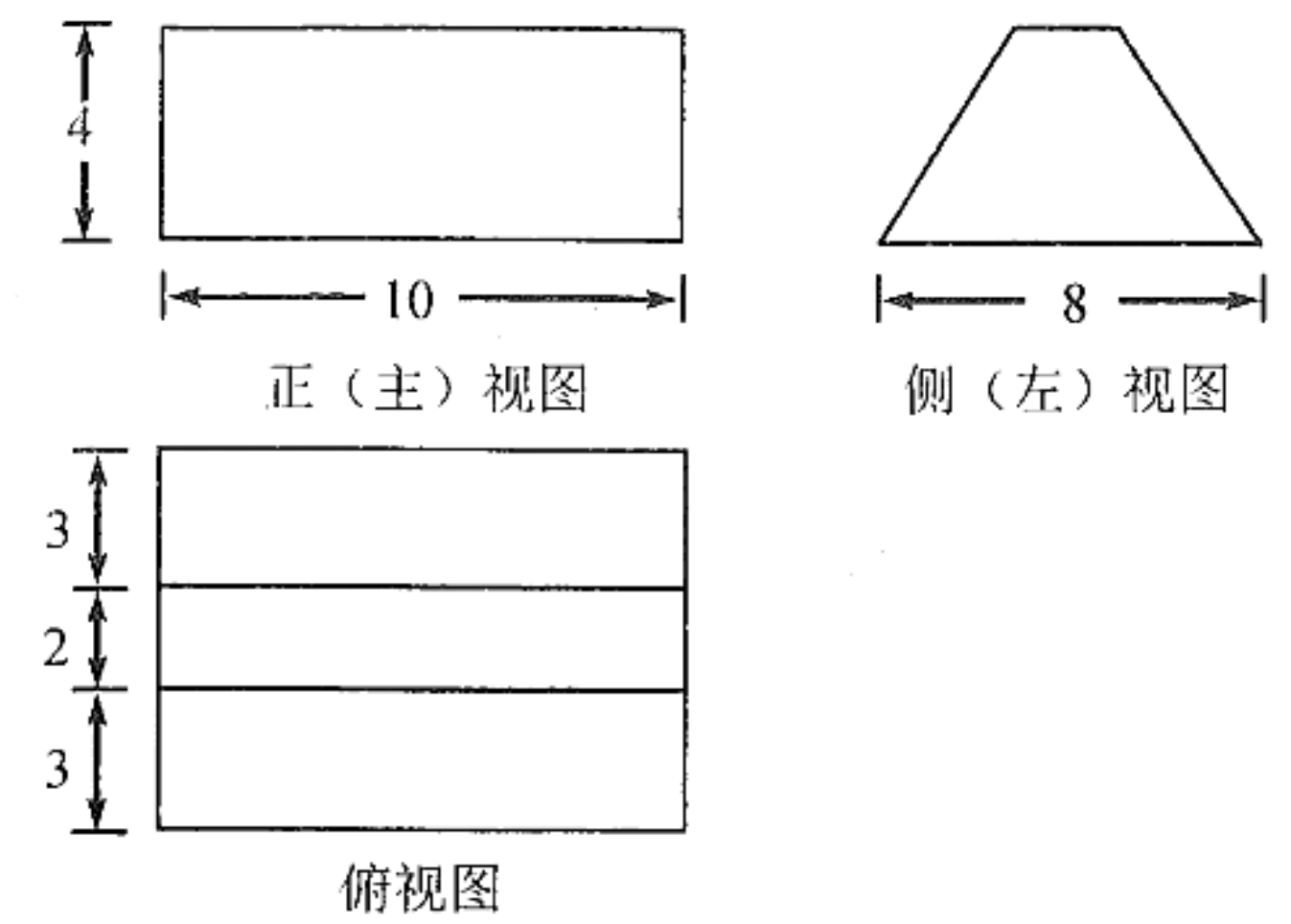
一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $\cos\theta - \sin\theta = \frac{4}{3}$, 则 θ 的终边在
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 复数 z 满足: $z\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 下面各式正确的是
A. $|z| = \frac{1}{2}$ B. $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
C. $z^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $z \cdot \bar{z} = 1$.
3. 下面说法错误的是
A. 离散型随机变量的各个可能值表示的事件是彼此互斥的;
B. 利用频率分布直方图计算的样本数字特征是样本数字特征的估计值;
C. 两个相关变量的线性相关性越强,相关系数的绝对值越接近于 1;
D. 在分层抽样的过程中,哪一层的样本越多,该层中个体被抽取的可能性越大.
4. 人们用分贝(dB)来划分声音的等级,声音的等级 $d(x)$ 单位(dB)与声音强度 x (单位 W/m^2) 满足 $d(x) = 9\lg \frac{x}{1 \times 10^{-13}}$, 一般两人小声交谈时,声音的等级约为 54dB,在有 50 人的课堂上讲课时,老师声音的强度约为一般两人小声交谈时声音强度的 10 倍,则老师声音的等级约为
A. 36d B. 63dB C. 72dB D. 81dB
5. 抛物线 $y = 4x^2$ 的焦点到双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 渐近线的距离是
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{16}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{32}$
6. S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $a_7 + a_9 = 10$, 则 $S_9 =$
A. 9 B. 16 C. 20 D. 27

理科数学试卷 第 1 页(共 4 页)

7. 某几何体的三视图如图所示,则该几何体的表面积为

- A. 240
B. 200
C. 320
D. 180



8. 三棱锥 $P - ABC$ 中, $\triangle PAB$ 和 $\triangle ABC$ 都是等边三角形, $AB = 2$, $PC = 1$, D 为棱 AB 上一点, 则 $\vec{PD} \cdot \vec{PC}$ 的值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 与 D 点位置有关

9. 已知把函数 $f(x) = \sin\omega x (\omega > 0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 后得到的图象关于 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称, $f(x)$ 在

$(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18})$ 上具有单调性, 则 ω 的最大值为

- A. 8 B. 16 C. 32 D. 36

10. 将面积为 4 的矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起, 使二面角 $A - BD - C$ 的大小为 $\theta (0 < \theta < \pi)$, 则三棱锥 $A - BCD$ 外接球的体积的最小值为

- A. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ B. $\frac{4\pi}{3}$ C. $\frac{32\pi}{3}$ D. 与 θ 的大小有关

11. 已知 P 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上任意一点, B 是椭圆 C 的上顶点, $|PB| \leq 2b$ 总成立, 则椭圆离心率的取值范围是

- A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ B. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ C. $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ D. $[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

12. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 且 U 的子集可表示由 0, 1 组成的 6 位字符串, 如: $\{2, 4\}$ 表示的是自左向右的第 2 个字符为 1, 第 4 个字符为 1, 其余字符均为 0 的 6 位字符串 010100, 并规定, 空集表示的字符串为 000000; 对于任意两集合 A, B , 我们定义集合运算 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, $A * B = (A - B) \cup (B - A)$. 若 $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 6\}$, 则 $A * B$ 表示的 6 位字符串是

- A. 101010 B. 011001 C. 010101 D. 000111

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填写在答题纸相应位置上.

13. S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = a \cdot 3^{n-1} + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a =$ _____.
14. 某校高一有 6 个班级争夺校篮球赛的前四名, 并对前四名发给不同的奖品, A, B 是其中两个班级, 若 A, B 不都得奖, 则不同的发奖方式共有 _____ 种.
15. 某公司一年购买 400 吨某种货物, 每次购买 x 吨 ($x \in \mathbb{N}^*$), 运费为 4 万元/次, 一年总存储费用为 $4x$ 万元, 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 $x =$ _____ 吨.

理科数学试卷 第 2 页(共 4 页)

16. 函数 $f(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x$ 的递增区间为_____；若 $a \in \left[-\frac{3}{e}, 0\right]$ ，则函数

$g(x) = (x-2)e^x - a(x+2)$ 零点的取值范围是_____.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一) 必考题：共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

在① $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，② $b+c=2\sqrt{3}$ ，③ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ 这三个条件中任选一个，补充到下面的问题中，若问题中的三角形存在，求 b, c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在 $\triangle ABC$ ，它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 2, a = 2$ _____？(注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分)

18. (本小题满分 12 分)

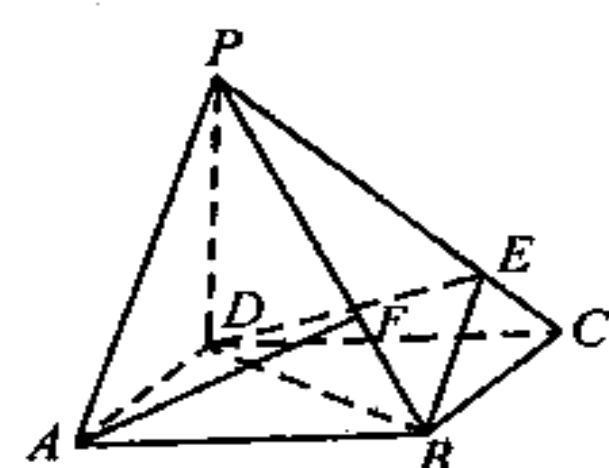
某联欢晚会举行抽奖活动，举办方设置了甲、乙两种抽奖方案，方案甲的中奖率为 $\frac{2}{3}$ ，中奖可以获得 2 分；方案乙的中奖率为 $\frac{2}{5}$ ，中奖可以获得 3 分；未中奖则不得分. 每人有且只有一次抽奖机会，每次抽奖中奖与否互不影响，晚会结束后凭分数兑换奖品.

- (I) 若小明选择方案甲抽奖，小红选择方案乙抽奖，记他们的累计得分为 X ，求 $X \leq 3$ 的概率；
(II) 若小明、小红两人都选择方案甲或都选择方案乙进行抽奖，问：他们选择何种方案抽奖，累计得分的数学期望较大？

19. (本小题满分 12 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 底面 $ABCD$ 是矩形， $PD \perp$ 面 $ABCD$ ， $PD = AB = 2BC = 4$ ， E, F 是棱 PC, PB 上的点， $\overrightarrow{PE} = 3\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{PF} = 2\overrightarrow{FB}$.

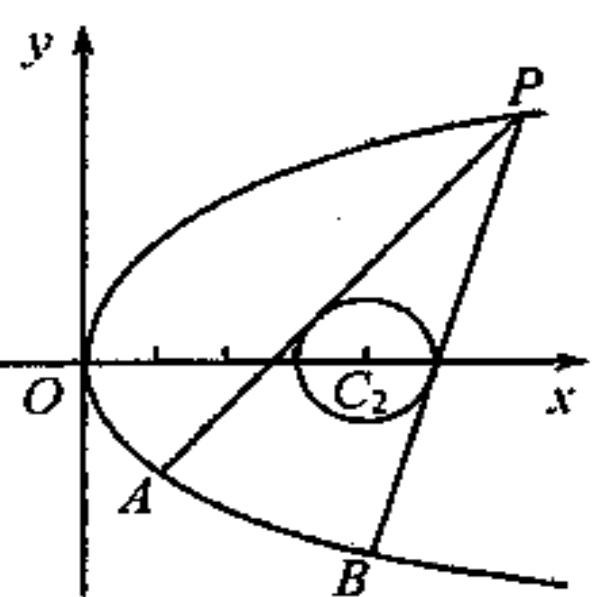
- (I) 求证： $AF \parallel$ 平面 BDE ；
(II) 棱 PA 上是否存在点 M ，使 $CM \perp$ 面 BDE ？若存在，求出 $\frac{PM}{MA}$ 的值；不存在，请说明理由.



20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C_1: y^2 = x$ ，圆 $C_2: (x-4)^2 + y^2 = 1$.

- (I) 求圆心 C_2 到抛物线 C_1 准线的距离；
(II) 已知点 P 是抛物线 C_1 上一点(异于原点)，过点 P 作圆 C_2 的两条切线，交抛物线 C_1 于 A, B 两点，若直线 PC_2 的斜率为 k_1 ，直线 AB 的斜率为 k_2 ， $k_1 \cdot k_2 = -\frac{5}{24}$ ，求点 P 的坐标.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax + x \ln x + b$ 的图像在 $x = e$ (e 为自然对数的底数) 处的切线方程为 $3x - y - 3e = 0$.

- (I) 求 a, b 的值；
(II) 当 $x > 1$ 时， $\frac{f(x) + 2e}{x-1} > n$ ($n \in N^*$) 恒成立，求 n 的最大值.

(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分，作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑. 本题满分 10 分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)，以 O 为极点， x 轴正半轴

为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程是 $\rho^2 = \frac{12}{3\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}$

- (I) 求 C 的直角坐标方程和 l 的普通方程；
(II) 设 $P(0, 1)$ ， l 与 C 交于 A, B 两点， M 为 AB 的中点，求 $|PM|$.

23. [选修 4-5: 不等式选讲]

已知， $f(x) = |2x-1| + 2|x+1|$.

- (I) 解不等式 $f(x) \geq 4$ ；
(II) 设 $f(x)$ 最小值为 m ， $a+2b+3c=m$ ，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值.