

福州市 2021 届高三 5 月调研卷

数学

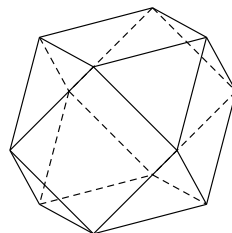
(完卷时间 120 分钟; 满分 150 分)

注意事项

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{x \in U | 3^x \leq 9\}$, 则 $\complement_U A =$
A. $\{1, 2\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{4, 5, 6\}$ D. $\{3, 4, 5, 6\}$
2. 已知 z 为复数, $z^2 + 1 = 0$, 则 $|z - 1|$ 等于
A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
3. 在 $(x + y + z)^6$ 的展开式中, xyz^4 的系数是
A. 15 B. 30 C. 36 D. 60
4. 某公园设置了一些石凳供大家休息, 每张石凳是由正方体石料截去八个一样的四面体得到的, 如图所示. 如果一张石凳的体积是 0.18 m^3 , 那么原正方体石料的体积是
A. 0.196 m^3 B. 0.216 m^3
C. 0.225 m^3 D. 0.234 m^3
5. 已知 $\log_2 a = 0.5^a = 0.2^b$, 则
A. $a < 1 < b$ B. $1 < a < b$
C. $b < 1 < a$ D. $1 < b < a$



6. 已知直线 $y = x - 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点. 若点 $C(-1, m)$ 满足 $\angle ACB = 90^\circ$, 则 $m =$

A. -1 B. 1 C. 2 D. 3

7. 经多次实验得到某种型号的汽车每小时耗油量 Q (单位: L) 与速度 v (单位: km/h) ($40 \leq v \leq 120$) 的数据如下表:

v	40	60	90	100	120
Q	5.2	6	8.325	10	15.6

为描述 Q 与 v 的关系, 现有以下三种模型供选择: $Q(v) = 0.04v + 3.6$, $Q(v) = 0.5^v + a$, $Q(v) = 0.000025v^3 - 0.004v^2 + 0.25v$. 选出最符合实际的函数模型, 解决下列问题: 某高速公路共有三个车道, 分别是外侧车道、中间车道、内侧车道, 车速范围分别是 $[60, 90)$, $[90, 110)$, $[110, 120]$ (单位: km/h). 为使百公里耗油量 W (单位: L) 最小, 该型号汽车行驶的车道与速度为

A. 在外侧车道以 80 km/h 行驶 B. 在中间车道以 90 km/h 行驶
C. 在中间车道以 95 km/h 行驶 D. 在内侧车道以 115 km/h 行驶

8. 为了了解疫情期间的心理需求, 心理健康辅导员设计了一份问卷调查, 问卷有两个问题: ①你的学号尾数是奇数吗? ②你是否需要心理疏导? 某校高三全体学生 870 人参加了该项问卷调查. 被调查者在保密的情况下掷一枚质地均匀的骰子, 当出现 1 点或 2 点时, 回答问题①, 否则回答问题②. 由于不知道被调查者回答的是哪一个问题, 因此, 当他回答“是”时, 别人无法知道他是否有心理问题, 这种调查既保护了他的隐私, 也能得到诚实的问卷反应. 问卷调查结束后, 发现该校高三学生中有 155 人回答“是”, 由此可估计该校高三需要心理疏导的学生人数约为

A. 10 B. 15 C. 29 D. 58

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知向量 $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$, $c = (1, 1)$, 在下列各组向量中, 可以作为平面内所有向量的一个基底的是

A. a, c B. $a, b - c$ C. $c, a + b$ D. $a + b, b - c$

10. 已知 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$)，直线 $x = \frac{5\pi}{12}$, $x = \frac{11\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的图象的相邻两条对称

轴，则下列说法正确的是

A. 函数 $y = f(x + \frac{5\pi}{12})$ 为偶函数

B. $f(x)$ 的图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{6}, 0)$

C. $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{5\pi}{6}]$ 上有 2 个零点

D. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上为单调函数

11. 在棱长为 2 的正四面体 $A-BCD$ 中， M 为 AD 的中点， N 为 BC 的中点，则下列说法正确的是

A. $MN \parallel CD$

B. 正四面体 $A-BCD$ 外接球的表面积等于 6π

C. $MN \perp BC$

D. 正四面体 $A-BCD$ 外接球的球心在 MN 上

12. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， M 为 AB 的中点，且 $|CA - CB| = CM$ ，则下列说法中正确的是

A. 动点 C 的轨迹是双曲线

B. 动点 C 的轨迹关于点 M 对称

C. $\triangle ABC$ 是钝角三角形

D. $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\tan(\pi - \alpha) = -\frac{3}{4}$ ，则 $\sin 2\alpha$ 的值为_____.

14. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_n a_{n+1} = 2^{2n+1}$ ，则 $S_n =$ _____.

15. 购买某种意外伤害保险，每个投保人每年度向保险公司交纳保险费 20 元，若被保险人在购买保险的一年度内出险，可获得赔偿金 50 万元. 已知该保险每一份保单需要赔付的概率为 10^{-5} ，某保险公司一年能销售 10 万份保单，且每份保单相互独立，则一年度内该保险公司此项保险业务需要赔付的概率约为_____；一年度内盈利的期望为_____万元. (参考数据： $(1 - 10^{-5})^{10^5} \approx 0.37$) (本小题第一空 2 分，第二空 3 分)

16. 函数 $f(x) = (x^2 - 10x + 26)e^x$ ，若 $\forall x_1, x_2 \in I$ ， $x_1 \neq x_2$ ，都有 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 成立，则满足条件的一个区间 I 可以是_____ (填写一个符合题意的区间即可).

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. (10 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ．

(1) 求 B ；

(2) 若 D 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的劣弧 AC 上一点，且 $a = 3$ ， $c = 4$ ， $AD = 1$ ，求 CD ．

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$ ， $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ ．

(1) 证明：存在等差数列 $\{b_n\}$ ，当 $n > 1$ 时， $a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ 成立；

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式．

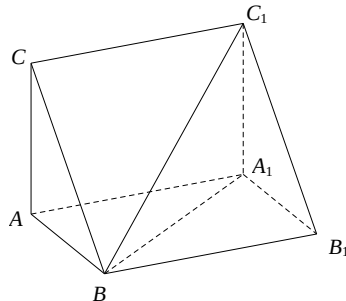
19. (12 分)

在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB \perp AC$ ，平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，

平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ．

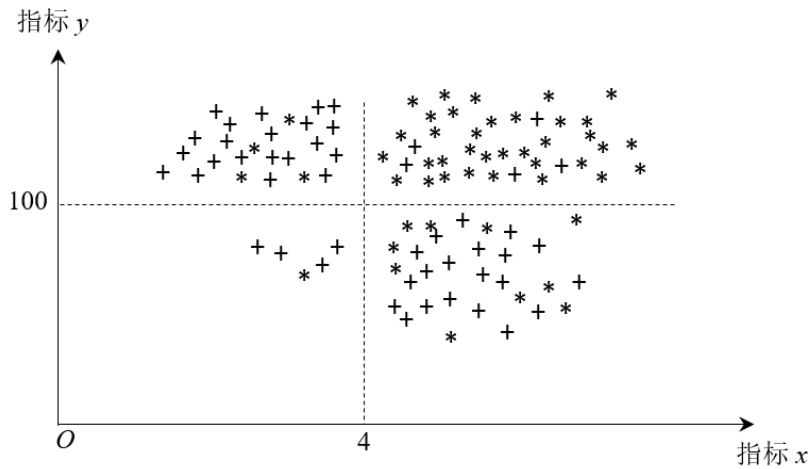
(1) 证明： $AA_1 \perp$ 平面 ABC ；

(2) 在① $AB = AC = 1$ ，② BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 30° ，③ 异面直线 C_1C 与 A_1B 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 这三个条件中任选两个，求二面角 $A_1 - BC_1 - B_1$ 的余弦值．



20. (12 分)

某种病菌在某地区人群中的带菌率为 10%，目前临床医学研究中已有费用昂贵但能准确检测出个体是否带菌的方法. 现引进操作易、成本低的新型检测方法：每次只需检测 x, y 两项指标，若指标 x 的值大于 4 且指标 y 的值大于 100，则检验结果呈阳性，否则呈阴性. 为考查该检测方法的准确度，随机抽取 50 位带菌者（用“*”表示）和 50 位不带菌者（用“+”表示）各做 1 次检测，他们检测后的数据，制成如下统计图：



- (1) 从这 100 名被检测者中，随机抽取一名不带菌者，求检测结果呈阳性的概率；
- (2) 能否在犯错误概率不超过 0.001 的前提下，认为“带菌”与“检测结果呈阳性”有关？

(2) 现用新型检测方法，对该地区人群进行全员检测，用频率估计概率，求每个被检者“带菌”且“检测结果呈阳性”的概率.

附：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)} .$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右顶点分别为 A, B , O 为原点. 以 OB 为

对角线的正方形 $OPBQ$ 的顶点 P, Q 在 C 上.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 当 $a = 2$ 时, 过 $(1, 0)$ 作与 x 轴不重合的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试判断 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值? 若是, 求出定值, 并加以证明; 若不是, 请说明理由.

22. (12 分)

(1) 若 $0 < a \leq 1$, 判断函数 $f(x) = a \sin(1-x) + \ln x$ 在区间 $(0, 1)$ 内的单调性;

(2) 证明: 对任意 $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$, $\sin^2 \frac{1}{5} + \sin^2 \frac{1}{10} + \cdots + \sin^2 \frac{1}{n^2 + 1} < \ln 2$.