

福州市 2021 届高三 5 月调研卷

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。
4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 40 分．

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. D | 2. C | 3. B | 4. B |
| 5. C | 6. C | 7. A | 8. B |

二、选择题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 20 分．每小题全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

- | | | | |
|-------|---------|---------|--------|
| 9. AD | 10. ABC | 11. BCD | 12. BD |
|-------|---------|---------|--------|

二、填空题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 20 分．

- | | |
|---------------------|----------------------------------|
| 13. $\frac{24}{25}$ | 14. $2^{n+1} - 2$ |
| 15. 0.63; 150 | 16. (2,3) 等（注：[2,4]的任意一个非空子区间均可） |

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17. 本小题主要考查正弦定理、余弦定理、解三角形等基础知识；考查运算求解能力；考查函数与方程思想，化归与转化思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养；体现基础性．满分 10 分．

解法一：（1）由题设及正弦定理得， $\sin B \sin A = \sin A \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，…………… 1 分

从而 $\sin B \sin A = \sin A(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B)$ ，……………2 分

化简得， $\frac{1}{2} \sin A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos B$. ……………3 分

因为 $0 < A < \pi, \therefore \sin A \neq 0$, 4 分

所以 $\tan B = \sqrt{3}$,

又 $0 < B < \pi$, 故 $B = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理知,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 13,$$

即 $b = \sqrt{13}$ 6 分

又由于 A, B, C, D 四点共圆, 从而 $\angle ADC = \pi - B = \frac{2\pi}{3}$, 7 分

在 $\triangle ADC$ 中, 设 $DC = x$, 由余弦定理得,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos \angle ADC, \text{ 8 分}$$

$$\text{即得 } 13 = 1^2 + x^2 - 2 \times 1 \cdot x \cdot \cos \frac{2\pi}{3},$$

化简得, $x^2 + x - 12 = 0$, 解得 $x = 3$ 或 $x = -4$ (舍去),

故 $DC = 3$ 10 分

解法二: (1) 由题设及正弦定理得, $\sin B \sin A = \sin A \cos(B - \frac{\pi}{6})$, 1 分

$$\text{从而 } \sin B \sin A = \sin A (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B), \text{ 2 分}$$

$$\text{化简得 } \frac{1}{2} \sin A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos B. \text{ 3 分}$$

因为 $0 < A < \pi, \therefore \sin A \neq 0$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \sin B - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B = 0,$$

$$\text{所以 } \sin(B - \frac{\pi}{3}) = 0, \text{ 4 分}$$

又 $0 < B < \pi$, 故 $B = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理知,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 13,$$

即 $b = \sqrt{13}$ 6 分

又由于 A, B, C, D 四点共圆, 从而 $\angle ADC = \pi - B = \frac{2\pi}{3}$, 7 分

在 $\triangle ACD$ 中, 设 $\angle ACD = \theta$, 则由正弦定理得

$$\frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}, \text{ 即 } \frac{1}{\sin \theta} = \frac{CD}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}, \text{ 8 分}$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}},$$

$$\text{又 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \text{ 所以 } \cos \theta = \frac{7}{2\sqrt{13}},$$

$$\text{所以 } \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}, \text{ 9 分}$$

$$\text{所以 } CD = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = 3. \text{ 10 分}$$

18. 本小题主要考查等差数列、等比数列的概念、通项公式, 数列求和等基础知识; 考查运算求解能力, 推理论证能力; 考查化归与转化思想; 考查数学抽象、数学运算等核心素养; 体现基础性, 综合性. 满分 12 分.

$$\text{解法一: (1) 当 } n > 1 \text{ 时, 由 } a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, \text{ 得 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2 - \frac{b_{n-1}}{b_n}, \text{ 2 分}$$

$$\text{化简得 } b_{n+1} = 2b_n - b_{n-1}, \text{ 即 } b_{n+1} - b_n = b_n - b_{n-1}, \text{ 4 分}$$

这说明 $\{b_n\}$ 是等差数列, 故存在一个等差数列 $\{b_n\}$, 当 $n > 1$ 时, $a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ 成立.

$$\text{..... 6 分}$$

$$(2) \text{ 依题意, } a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = \frac{5}{3}, \text{ 7 分}$$

$$\text{又由 (1) 知 } a_2 = \frac{b_2}{b_1}, \text{ 所以 } \frac{b_2}{b_1} = \frac{5}{3}, \text{ 即 } b_2 = \frac{5}{3}b_1, \text{ 8 分}$$

$$\text{所以等差数列 } \{b_n\} \text{ 的公差 } d = b_2 - b_1 = \frac{2}{3}b_1, \text{ 9 分}$$

$$\text{所以 } b_n = b_1 + (n-1)d = \frac{2}{3}\left(n + \frac{1}{2}\right)b_1, \text{ 11 分}$$

$$\text{故 } a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})b_1}{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{2})b_1} = \frac{2n+1}{2n-1}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法二：（1）由已知，当 $n > 1$ 时，因为 $a_1 = 3$ ， $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ ，

$$\text{所以 } a_2 = \frac{5}{3}, a_3 = \frac{7}{5}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

故令 $b_n = 2n - 1$ ，则数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$\text{此时 } a_n = \frac{2n+1}{2n-1}, \text{ 代入验算满足 } a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n},$$

故存在一个等差数列 $\{b_n\}$ ，当 $n > 1$ 时， $a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ 成立，命题得证. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 由 } a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, \text{ 得 } a_{n+1} - 1 = 1 - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - 1}{a_n}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{由 } a_1 = 3, \text{ 得 } a_n - 1 \neq 0, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{1}{a_n - 1} + 1, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以 $\left\{ \frac{1}{a_n - 1} \right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$ ，公差为 1 的等差数列，

$$\text{即 } \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{2} + (n-1) = \frac{2n-1}{2}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{2n+1}{2n-1}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，直线与平面所成的角，异面直线所成的角等基础知识；考查空间想象能力，推理论证能力，运算求解能力；考查化归与转化思想，数形结合思想，函数与方程思想；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性. 满分 12 分.

解法一：（1）证明：因为 $AB \perp AC$ ，平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，

平面 $ABC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = AB$ ， $AB \subset$ 平面 ABC ，所以 $AC \perp$ 平面 ABB_1A_1 . $\dots\dots 1 \text{ 分}$

又因为 $AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 ，所以 $AC \perp AA_1$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

同理： $AB \perp AA_1$ ， $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又因为 $AB \cap AC = A$ ，所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ； 5 分

(2) 选择①②；

由 (1) 知， $AA_1 \perp$ 平面 ABC ，所以三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 是直三棱柱.

因为 $AC \perp AB$ ， $AB = AC = 1$ ，所以 $BC = \sqrt{2}$.

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ， $A_1C_1 \parallel AC$ ，

所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，所以 $\angle C_1BA_1$ 为 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角，

所以 $\angle C_1BA_1 = 30^\circ$ 6 分

在 $\text{Rt} \triangle C_1A_1B$ 中， $C_1A_1 = 1$ ， $C_1B = 2$ ，所以 $A_1B = \sqrt{3}$ ，

在 $\text{Rt} \triangle ABA_1$ 中， $AB = 1$ ，所以 $AA_1 = \sqrt{2}$ 7 分

以 A 为原点， $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系，如图所示.

$B(1, 0, 0)$ ， $C(0, 0, 1)$ ， $B_1(1, \sqrt{2}, 0)$ ， $A_1(0, \sqrt{2}, 0)$ ， $C_1(0, \sqrt{2}, 1)$

所以 $\overrightarrow{BA_1} = (-1, \sqrt{2}, 0)$ ， $\overrightarrow{A_1C_1} = (0, 0, 1)$ ，

$\overrightarrow{BC_1} = (-1, \sqrt{2}, 1)$ ， $\overrightarrow{BB_1} = (0, \sqrt{2}, 0)$ 8 分

设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ ，

由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -x + \sqrt{2}y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ，令 $y = 1$ 得平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (\sqrt{2}, 1, 0)$.

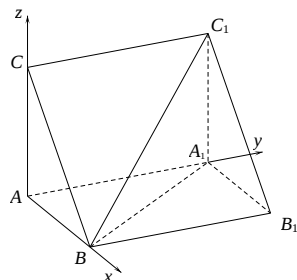
..... 9 分

设平面 BC_1B_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ，

由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sqrt{2}y = 0 \\ -x + \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases}$ ，令 $x = 1$ 得平面 BC_1B_1 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$.

..... 10 分

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， 11 分



所以二面角 $A_1-BC_1-B_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 12 分

解法二:

(1) 同解法一; 5 分

(2) 选择①③;

因为 $AC \perp AB$, $AB=AC=1$, 所以 $BC=\sqrt{2}$.

由 (1) 知, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 故 $AA_1 \perp AB$,

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $C_1C \parallel A_1A$,

所以异面直线 C_1C 与 A_1B 所成角为 $\angle AA_1B$, 所以 $\cos \angle AA_1B = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 6 分

在 $\text{Rt} \triangle ABA_1$ 中, 因为 $AB=1$, $AA_1 \perp AB$, $\cos \angle AA_1B = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以 $AA_1 = \sqrt{2}$ 7 分

下同解法一; 12 分

解法三:

(1) 同解法一; 5 分

选择②③;

由 (1) 知, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $A_1C_1 \parallel AC$,

所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $\angle C_1BA_1$ 为 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角,

所以 $\angle C_1BA_1 = 30^\circ$ 6 分

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $C_1C \parallel A_1A$, 且 $AA_1 \perp AB$,

所以异面直线 C_1C 与 A_1B 所成角为 $\angle AA_1B$, 所以 $\cos \angle AA_1B = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 7 分

在 $\text{Rt} \triangle A_1BC_1$ 中, 设 $C_1A_1 = 1$, 则 $C_1B = 2$, 所以 $A_1B = \sqrt{3}$,

在 $\text{Rt} \triangle ABA_1$ 中, 因为 $A_1B = \sqrt{3}$, $\cos \angle AA_1B = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以 $AA_1 = \sqrt{2}$, $AB = 1$ 8 分

下同解法一. 12 分

20. 本题主要考查用样本估计总体，独立性检验，条件概率等基础知识；考查数学建模能力，运算求解能力，推理论证能力，创新能力以及应用意识；考查统计与概率思想，化归与转化思想；考查数学建模，数据分析，数学运算等核心素养；体现综合性、应用性和创新性. 满分 12 分.

解法一：（1）设 $A =$ “从这 100 名被检测者中，随机抽取一名不带菌者，检测结果呈阳性”， 1 分

根据统计图可知在不带菌者中，检测结果呈阳性的有 5 人， 2 分

所以 $P(A) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$ 3 分

（2）假设 H_0 ：“带菌”与“检测结果呈阳性”无关， 4 分

可作出 2×2 列联表如下： 5 分

	阳性	阴性	合计
带菌	35	15	50
不带菌	5	45	50
合计	40	60	100

进一步计算得， K^2 的观测值 $k = \frac{100 \times (35 \times 45 - 15 \times 5)^2}{40 \times 60 \times 50 \times 50} = 37.5 > 10.828$ ； 6 分

因为 $P(K^2 \geq 10.828) = 0.001$ ， 7 分

所以，能够在犯错误概率不超过 0.001 的前提下认为“带菌”与“检测结果呈阳性”有关. 8 分

（3）设 $B =$ “被检测者带菌”， $C =$ “被检测者检测结果呈阳性”，

则 $BC =$ “被检者‘带菌’且‘检测结果呈阳性’”， 9 分

用频率估计概率，根据题意可知： $P(B) = 0.1$ ， $P(C|B) = \frac{35}{50} = 0.7$ ， 11 分

所以由条件概率公式可知 $P(BC) = P(B) \cdot P(C|B) = 0.1 \times 0.7 = 0.07$ 12 分

解法二：（1）设 $A =$ “从这 100 名被检测者中，随机抽取一名为不带菌者”， $D =$ “从这 100 名被检测者中，随机抽取一名检测结果呈阳性”，

则“从这 100 名被检测者中，随机抽取一名不带菌者，检测结果呈阳性”的概率就是
“在事件 A 发生的条件下，事件 D 发生”的概率，记为 $P(D|A)$. ……………1 分

根据题意， $P(A)=\frac{1}{2}$ ， $P(AD)=\frac{5}{100}$ ，……………2 分

利用条件概率公式，得 $P(D|A)=\frac{P(AD)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{10}$. ……………3 分

(2) 下同解法一. ……………12 分

21. 本小题主要考查椭圆的标准方程及简单几何性质，直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性和综合性. 满分 12 分.

解法一：(1) 以 OB 为对角线的正方形 $OPBQ$ 的顶点

坐标分别为 $B(a,0)$, $P(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, $Q(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$. ………1 分

因为 P, Q 在椭圆上，所以 $\frac{\frac{a^2}{4}}{a^2} + \frac{\frac{a^2}{4}}{b^2} = 1$, ………2 分

所以 $\frac{a^2}{b^2} = 3$, ……………3 分

所以 $c^2 = a^2 - b^2 = 2b^2$, ……………4 分

所以椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; ……………5 分

(2) 当 $a=2$ 时， $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，所以椭圆的方程为 $x^2 + 3y^2 = 4$. ……………6 分

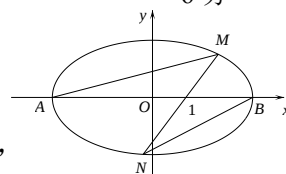
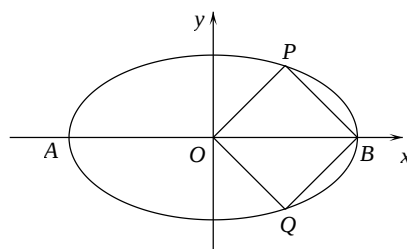
$\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 $\frac{1}{3}$ ，理由如下：

①当直线 l 的斜率不存在时， l 的方程为 $x=1$ ，则 $M(1,1), N(1,-1)$ ，

所以 $k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 2} = \frac{1}{1 - (-2)} = \frac{1}{3}$ ， $k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{-1}{1 - 2} = 1$ ，所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$. ……………7 分

②当直线 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $x = my + 1$ ， $m \neq 0$ ，

设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，



不妨设 $y_2 < 0 < y_1$ ，且 $y_1 + y_2 \neq 0$ 。

由 $\begin{cases} x = my + 1 \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$ 可得 $(m^2 + 3)y^2 + 2my - 3 = 0$ ，……………8 分

$\Delta = 16m^2 + 36 > 0$ ， $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 3}$ ， $y_1 y_2 = -\frac{3}{m^2 + 3}$ 。……………9 分

要证 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$ ，只要证明： $\frac{\frac{y_1}{x_1 + 2}}{\frac{y_2}{x_2 - 2}} = \frac{1}{3}$ ，

只要证： $3y_1(x_2 - 2) = y_2(x_1 + 2)$ ，

只要证： $3y_1(my_2 - 1) = y_2(my_1 + 3)$ ，

只要证： $2my_1 y_2 = 3(y_1 + y_2)$ ，

因为 $y_1 + y_2 \neq 0$ ， $m \neq 0$ ，即证 $\frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{3}{2m}$ ，……………10 分

因为 $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 3}$ ， $y_1 y_2 = -\frac{3}{m^2 + 3}$ ，所以 $\frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{3}{2m}$ 。

所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$ 成立，……………11 分

综上所述： $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$ 。……………12 分

解法二：（1）同解法一；……………5 分

（2）当 $a = 2$ 时， $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，所以椭圆的方程为 $x^2 + 3y^2 = 4$ 。……………6 分

设 l 的方程为 $x = my + 1$ ， $m \neq 0$ ，

设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，不妨设 $y_2 < 0 < y_1$ 。

由 $\begin{cases} x = my + 1 \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$ 可得 $(m^2 + 3)y^2 + 2my - 3 = 0$ ，

$\Delta = 16m^2 + 36 > 0$ ， $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 3}$ ， $y_1 y_2 = -\frac{3}{m^2 + 3}$ 。……………7 分

所以 $\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = \frac{2m}{3}$ ，即 $2my_1 y_2 = 3(y_1 + y_2)$ 。……………8 分

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= \frac{y_1}{x_1+2} \cdot \frac{x_2-2}{y_2}$$

$$= \frac{y_1(my_2-1)}{(my_1+3)y_2} = \frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2} = \frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上所述: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

解法三: (1) 同解法一; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 当 $a=2$ 时, $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以椭圆的方程为 $x^2+3y^2=4$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设 l 的方程为 $x=my+1$, $m \neq 0$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 不妨设 $y_2 < 0 < y_1$.

由 $\begin{cases} x=my+1 \\ x^2+3y^2=4 \end{cases}$ 可得 $(m^2+3)y^2+2my-3=0$,

$$\Delta=16m^2+36>0, \quad y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+3}, \quad y_1y_2=-\frac{3}{m^2+3} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

因为 N 在椭圆上, 所以 $x_2^2+3y_2^2=4$, 即 $x_2^2-4+3y_2^2=0$,

所以 $\frac{y_2}{x_2-2} \cdot \frac{y_2}{x_2+2} = -\frac{1}{3} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}} = \frac{y_1}{x_1+2} \cdot \frac{x_2-2}{y_2} = \frac{y_1}{x_1+2} \cdot \frac{-3y_2}{x_2+2}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= \frac{-3y_1y_2}{(my_1+3)(my_2+3)}$$

$$= \frac{-3y_1y_2}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{-3(-\frac{3}{m^2+3})}{m^2(-\frac{3}{m^2+3})+3m(-\frac{2m}{m^2+3})+9} = \frac{\frac{9}{m^2+3}}{\frac{m^2+3}{27}} = \frac{1}{3}.$$

所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$ 11 分

综上所述: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$ 12 分

解法四: (1) 同解法一; 5 分

(2) 当 $a=2$ 时, $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以椭圆的方程为 $x^2+3y^2=4$ 6 分

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

因为 M 在椭圆上, 所以 $x_1^2+3y_1^2=4$, 所以 $\frac{y_1}{x_1+2} \cdot \frac{y_1}{x_1-2} = -\frac{1}{3}$ 7 分

所以 $k_1 = \frac{y_1}{x_1+2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x_1-2}{y_1}$, 8 分

同理 $k_2 = \frac{y_2}{x_2-2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x_2+2}{y_2}$ 9 分

设 $t = \frac{k_1}{k_2}$, 则 $t = \frac{(x_2-2)y_1}{(x_1+2)y_2} = \frac{(x_1-2)y_2}{(x_2+2)y_1}$,

所以 $tx_1y_2+2ty_2=x_2y_1-2y_1$, ①

$x_1y_2-2y_2=tx_2y_1+2ty_1$, ②

①+②得 $(t+1)x_1y_2+2(t-1)y_2=(t+1)x_2y_1+2(t-1)y_1$, 10 分

当 $t=-1$ 时得 $y_2=y_1$, 不合题意, 舍去.

当 $t \neq -1$ 时, $\left(x_1 - \frac{2(1-t)}{t+1}\right)y_2 = \left(x_2 - \frac{2(1-t)}{t+1}\right)y_1$,

所以直线 MN 经过点 $\left(\frac{2(1-t)}{t+1}, 0\right)$,

又 MN 过定点 $(1, 0)$, 故 $\frac{2(1-t)}{t+1}=1$, 解得 $t=\frac{1}{3}$ 11 分

综上所述: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$ 12 分

22. 本小题主要考查导数, 函数的单调性, 不等式等基础知识; 考查逻辑推理能力, 运算求解能力和创新能力; 考查函数与方程思想, 化归与转化思想, 数形结合思想; 考查逻辑推理, 直观想象, 数学运算等核心素养; 体现综合性和创新性. 满分 12 分.

解法一: (1) 因为 $f(x) = a \sin(1-x) + \ln x$,

所以 $f'(x) = -a \cos(1-x) + \frac{1}{x}$ 1 分

因为 $0 < x < 1$, 所以 $0 < 1-x < 1$, 则 $0 < \cos(1-x) < 1$ 2 分

又 $0 < a \leq 1$, 知 $0 < a \cos(1-x) < 1$, 且 $0 < x < 1$ 时 $\frac{1}{x} > 1$, 3 分

故 $f'(x) = -a \cos(1-x) + \frac{1}{x} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增. 4 分

(2) 由 (1) 知, 当 $a=1$ 时, $f(x) < f(1)$, 即 $\sin(1-x) + \ln x < 0$,

所以 $\sin(1-x) < \ln \frac{1}{x}$ 5 分

令 $1-x = \frac{1}{n^2+1}$, 所以 $x = 1 - \frac{1}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$, 从而 $\frac{1}{x} = \frac{n^2+1}{n^2}$,

所以 $\sin \frac{1}{n^2+1} < \ln \frac{n^2+1}{n^2} = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$, 6 分

因为 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\frac{1}{n^2+1} \in (0,1)$, 所以 $0 < \sin \frac{1}{n^2+1} < 1$,

所以 $\sin^2 \frac{1}{n^2+1} < \sin \frac{1}{n^2+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$, 7 分

所以 $\sin^2 \frac{1}{5} + \sin^2 \frac{1}{10} + \cdots + \sin^2 \frac{1}{n^2+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$,

即 $\sin^2 \frac{1}{5} + \sin^2 \frac{1}{10} + \cdots + \sin^2 \frac{1}{n^2+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 8 分

因为 $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$ 9 分

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)}{\frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}}$$

..... 10 分

$$= \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) < 2, \quad \text{..... 11 分}$$

$$\text{所以 } \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \ln 2,$$

$$\text{所以 } \sin^2 \frac{1}{5} + \sin^2 \frac{1}{10} + \cdots + \sin^2 \frac{1}{n^2 + 1} < \ln 2. \quad \text{..... 12 分}$$

解法二: (1) 同解法一; 4 分

$$(2) \text{ 由 (1) 知, 当 } a=1 \text{ 时, } f(x) < f(1), \text{ 即 } \sin(1-x) + \ln x < 0,$$

$$\text{所以 } \sin(1-x) < \ln \frac{1}{x}. \quad \text{..... 5 分}$$

$$\text{令 } 1-x = \frac{1}{n^2 + 1}, \text{ 所以 } x = 1 - \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2 + 1}, \text{ 从而 } \frac{1}{x} = \frac{n^2 + 1}{n^2},$$

$$\text{所以 } 0 < \sin \frac{1}{n^2 + 1} < \ln \frac{n^2 + 1}{n^2} = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \ln 2 \quad (n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n \geq 2), \quad \text{..... 6 分}$$

$$\text{构造函数 } \varphi(x) = \ln(1+x) - x, \quad x > 0,$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0, \text{ 所以 } \varphi(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{所以 } \varphi(x) < \varphi(0) = 0, \text{ 即 } \ln(1+x) < x (x > 0), \quad \text{..... 7 分}$$

$$\text{所以 } 0 < \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} (k > 1), \quad \text{..... 8 分}$$

$$\text{所以当 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n \geq 2, \quad 0 < \sin \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n(n-1)}, \text{ 故 } \sin^2 \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{\ln 2}{n(n-1)}, \quad \text{..... 9 分}$$

$$\text{所以 } \sin^2 \frac{1}{5} + \sin^2 \frac{1}{10} + \cdots + \sin^2 \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$< (\ln 2) \cdot \frac{1}{1 \times 2} + (\ln 2) \cdot \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + (\ln 2) \cdot \frac{1}{(n-1) \times n}$$

$$= \left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \right] \cdot \ln 2$$

$$= \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}\right] \right\} \cdot \ln 2 \quad \text{..... 10 分}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ln 2 < \ln 2. \quad \text{..... 11 分}$$

$$\text{所以 } \sin^2 \frac{1}{5} + \sin^2 \frac{1}{10} + \cdots + \sin^2 \frac{1}{n^2 + 1} < \ln 2. \quad \text{..... 12 分}$$