

“皖南八校”2021 届高三摸底联考·数学(理科)

参考答案、解析及评分细则

1. D 由题意得, $A = \{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\}$, $\complement_U A = \{x | -1 < x < 1\}$, $\therefore (\complement_U A) \cap B = (-1, 0]$.

2. D

3. B 由题意 $a^2 = b^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{6}}{2} \right)^2 = 3$, $\therefore b = \sqrt{3}$.

4. D 因为向量 $\mathbf{a} = (2, 2)$, $\mathbf{b} = (1, x)$, 所以 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (4, 2+2x)$,

因为 $\mathbf{a} \parallel (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$, 所以 $\frac{4}{2} = \frac{2+2x}{2}$,

所以 $x = 1$, 所以 $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$.

5. B 函数的周期为 π , 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{1}{4}$ 个周期即 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 所得图象对应的函数为 $g(x)$
 $= 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

6. A 记每天走的路程里数为 $\{a_n\}$, 可知 $\{a_n\}$ 是公比 $q = \frac{1}{2}$ 的等比数列,

由 $S_6 = 378$, 得 $S_6 = \frac{a_1(1 - \frac{1}{2^6})}{1 - \frac{1}{2}} = 378$, 解得 $a_1 = 192$,

$\therefore a_3 + a_4 = 192 \times (\frac{1}{2})^2 + 192 \times (\frac{1}{2})^3 = 48 + 24 = 72$.

所以此人第 3 天和第 4 天共走了 72 里.

7. B 当 $a = 2$ 时, 进入循环, $b = 2, a = 3$, 当 $a = 3$ 时, 再次进入循环, $b = 2^2 = 4, a = 4$, 当 $a = 4$ 时, 再次进入循环, $b = 2^4 = 16, a = 5$, 所以当 $a = 5$ 时应跳出循环, 故判断条件应是 $a \leq 4$.

8. D 令 $f(x) = 2^{|x|} \sin 2x$,

因为 $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = 2^{|-x|} \sin(-x) = -2^{|x|} \sin 2x = -f(x)$, 所以 $f(x) = 2^{|x|} \sin 2x$ 为奇函数, 排除选项 A, B;

因为 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $f(x) < 0$, 所以排除选项 C, 选 D.

9. D 因为 $2x + y + xy - 6 = 0$, 所以 $xy = 6 - (2x + y)$, 因为 x, y 为正实数, 所以 $xy = \frac{1}{2} 2xy \leq \frac{1}{2} (\frac{2x+y}{2})^2$, 当且仅当 $2x = y$ 时等号成立, 所以 $6 - (2x + y) \leq \frac{1}{2} (\frac{2x+y}{2})^2$, 解得 $2x + y \geq 4$.

10. D 该几何体为一个底面为正方形的四棱锥, 挖去一个半圆锥, 作 CD 的中点 E , 易知 $\angle EAB$ 为直线 AB 与平面 ACD 所成的角. 又 $AE = 2\sqrt{2}, BE = 1, AB = \sqrt{5}$, 所以 $\cos \angle EAB = \frac{8+5-1}{2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

11. C 函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 即为 $f(x) + f(-x) = 2$ 可得 $f(x)$ 的图像关于点 $(0, 1)$ 对称.

函数 $y = \frac{x+1}{x}$, 即 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称,

即若点 (x_1, y_1) 为交点, 则点 $(-x_1, 2 - y_1)$ 也为交点; 同理若点 (x_2, y_2) 为交点, 则点 $(-x_2, 2 - y_2)$ 也为交点;

则交点的所有横坐标和纵坐标之和为 $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_{2020} + y_{2020}) = \frac{1}{2} [(x_1 + y_1) + (-x_1 + 2 - y_1) + (x_2 + y_2) + (-x_2 + 2 - y_2) + \cdots + (x_{2020} + y_{2020}) + (-x_{2020} + 2 - y_{2020})] = 2020$.

12. D 由题意 $f'(x) = \frac{(ax+1-a)e^{x-2}}{(ax+1)^2}$, $\therefore k = f'(1) = \frac{e^{-1}}{(a+1)^2}$, 又 $f(1) = \frac{e^{-1}}{a+1}$, 故曲线在点 $(1, f(1))$ 处的切线

方程为 $y - \frac{1}{e(a+1)} = \frac{1}{e(a+1)^2} (x - 1)$, 将点 $(-1, 0)$ 代入可得 $a = 1$, 则 $f'(x) = \frac{xe^{x-2}}{(x+1)^2}$, 故函数在 $(-\infty, -1), (-1, 0)$ 上单调递减.

13. $\sqrt{5}$ $z = \frac{4+2i}{2i} = 1 - 2i$, 故 $|\bar{z}| = |1+2i| = \sqrt{5}$.

14. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 不等式组 $\begin{cases} 2x+y-4 \geq 0, \\ x-y-2 \leq 0, \\ y-3 \leq 0, \end{cases}$ 代表区域为三角形,由图可知直线 $y=-2x+2$ 与直线 $2x+y-4=0$ 平行,

$|MN|_{\min}$ 即为直线 $y=-2x+2$ 与直线 $2x+y-4=0$ 之间的距离,所以 $|MN|_{\min} = \frac{|4-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

15. $\frac{1}{2}$ 因为 $\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1+b_2+b_3} = \frac{a_1^2+(a_1+d)^2+(a_1+2d)^2}{b_1+b_1q+b_1q^2} = \frac{14}{1+q+q^2}$,故由已知条件可知 $1+q+q^2 = \frac{14}{m}$,其中 m 为正整数.令 $1+q+q^2 = \frac{14}{m}$,

$q = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{14}{m} - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{56-3m}{4m}} \geq \frac{1}{2}$,解得 $m \leq 8$,

由于公比 $q \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$,所以 $1+q+q^2 \in [\frac{7}{4}, 2)$, $\frac{7}{4} \leq \frac{14}{m} < 2$,解得 $7 < m \leq 8$,故 $m=8$,

所以 $1+q+q^2 = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$,解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 $q = -\frac{3}{2}$ (舍去).

16. $(\frac{e+1}{5}, \frac{e+1}{3}) \cup \{\frac{1}{2}\}$ 由题意,函数满足 $f(x)-f(x+2)=0$,即 $f(x)=f(x+2)$,即函数 $f(x)$ 的周期为 2,

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x \cdot e^x$,可得函数为单调递增函数,且 $f(0)=0, f(1)=e$,

当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) = f(-x) = -x \cdot e^{-x}$,

由图象可知当 $x=1$ 时, $f(1)=e$,当 $x=3$ 时, $f(3)=f(1)=e$,即 $B(1, e), C(3, e)$,

当直线 $y=k(x+2)-1$ 经过点 $B(1, e)$ 时,此时在区间 $[-1, 3]$ 内两个函数有 2 个交点,此时 $e=3k-1$,解得

$k = \frac{e+1}{3}$. 直线 $y=k(x+2)-1$ 经过点 $C(3, e)$ 时,此时在区间 $[-1, 3]$ 内两个函数有 4 个交点,此时 $e=5k-1$,解得 $k = \frac{e+1}{5}$. 直线 $y=k(x+2)-1$ 经过点 $O(0, 0)$ 时,此时在区间 $[-1, 3]$ 内两个函数有 3 个交点,此

时 $k = \frac{1}{2}$.

所以要使得函数 $g(x) = f(x) - kx - 2k$ 有且仅有 3 个零点,则直线的斜率满足 $\frac{e+1}{5} < k < \frac{e+1}{3}$ 或 $k = \frac{1}{2}$,

即实数 k 的取值范围是 $(\frac{e+1}{5}, \frac{e+1}{3}) \cup \{\frac{1}{2}\}$.

17. 解:(1) 设三角形 ABC 的外接圆的直径长为 $2R$

由已知 $a \sin A + c \sin C - a \sin C = b \sin B$ 及正弦定理

得 $\frac{a^2}{2R} + \frac{c^2}{2R} - \frac{ac}{2R} = \frac{b^2}{2R}$,

所以 $a^2 + c^2 - ac = b^2$,

即 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ 3 分

由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$, 4 分

因为 $0 < B < \pi$,所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 因为 $B = \frac{\pi}{3}$,所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2$,

三角形 ABC 面积 $S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 4 \sin A \sin C \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin A \sin(\frac{2\pi}{3} - A) = \sqrt{3} \sin A (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A +$

$\frac{1}{2} \sin A) = \frac{3}{4} \sin 2A + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2A = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2A - \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{4}$, 6 分

$\because A \in (0, \frac{2\pi}{3})$, $\therefore 2A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$, 8 分

当且仅当 $A = \frac{\pi}{3}$ 时, $2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$,此时 $\triangle ABC$ 面积取得最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 10 分

18. 解:(1) 因为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是等差数列,且 $A_2=3, A_5=B_5$,所以 $\begin{cases} 2a_1+d=3 \\ 5a_1+10d=9+6d \end{cases}$ 2 分

整理得 $\begin{cases} 2a_1 + d = 3 \\ 5a_1 + 4d = 9 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases}$, 4 分

所以 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = n$, 即 $a_n = n$, 5 分

$b_n = b_1 + (n-1) \cdot 2d = 2n+1$, 即 $b_n = 2n+1$.

综上, $a_n = n, b_n = 2n+1$ 6 分

(2) 由(1)得 $c_n = 2n+1 + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 2n+1 + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ 9 分

所以 $S_n = (3+5+\cdots+2n+1) + [(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]$,

即 $S_n = n^2 + 2n + 1 - \frac{1}{n+1} = (n+1)^2 - \frac{1}{n+1} < (n+1)^2$ 12 分

19. 解: (1) 侧面 AA_1C_1C 是菱形, D 是 AC_1 的中点,

$\because BA = BC_1, \therefore BD \perp AC_1$.

$\because$ 平面 $ABC_1 \perp$ 平面 AA_1C_1C , 且 $BD \subset$ 平面 ABC_1 ,

平面 $ABC_1 \cap$ 平面 $AA_1C_1C = AC_1$,

$\therefore BD \perp$ 平面 $AA_1C_1C, C_1C \subset$ 平面 AA_1C_1C ,

$\therefore BD \perp C_1C$ 4 分

(2) 由棱柱的定义知: 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $ABC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$,

$\therefore$ 平面 ABC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的锐二面角与二面角 C_1-AB-C 相等.

$\because BD \perp$ 平面 $AA_1C_1C, \therefore BD \perp A_1C$.

如图, 以 D 为原点, 以 DA, DC, DB 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系.

由已知可得 $AC_1 = 2, AD = 1, BD = A_1D = DC = \sqrt{3}, BC = \sqrt{6}$,

$\therefore D(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 0, \sqrt{3}), C_1(-1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0)$.

设平面 ABC 的一个法向量 $\vec{m} = (x, y, z), \vec{AB} = (-1, 0, \sqrt{3}), \vec{BC} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$,

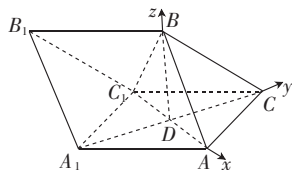
由 $\vec{AB} \cdot \vec{m} = 0, \vec{BC} \cdot \vec{m} = 0$, 得 $\begin{cases} -x + \sqrt{3}z = 0 \\ \sqrt{3}y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$, 可得 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 1, 1)$.

$\because$ 平面 $ABC_1 \perp$ 平面 $AA_1C_1C, AC_1 \perp A_1C, \therefore CD \perp$ 平面 ABC_1 ,

$\therefore$ 平面 ABC_1 的一个法向量是 $\vec{DC} = (0, \sqrt{3}, 0)$,

$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{DC} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{DC}}{|\vec{m}| |\vec{DC}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

即平面 ABC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成锐二面角的余弦值是 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分



20. 解: (1) 由频率分布直方图可得 $0.016 + 0.036 + 0.080 + 0.044 + a = \frac{1}{5}$, 解得 $a = 0.024$, 3 分

各组频率依次为 $0.08, 0.18, 0.4, 0.22, 0.12$,

则这批零件长度的平均值为

$\bar{x} = 12.5 \times 0.08 + 17.5 \times 0.18 + 22.5 \times 0.4 + 27.5 \times 0.22 + 32.5 \times 0.12 = 23.1$ 6 分

(2) 由题意可知第 1 组和第 5 组的零件数分别是 8 和 12,

则应从第 1 组中抽取 2 个零件, 记为 A, B ;

应从第 5 组中抽取 3 个零件, 记为 c, d, e .

从这 5 个零件中随机抽取 2 个的情况有 $AB, Ac, Ad, Ae, Bc, Bd, Be, cd, ce, de$, 共 10 种, 9 分

其中符合条件的情况有 Ac, Ad, Ae, Bc, Bd, Be , 共 6 种. 11 分

故所求概率 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 12 分

21. 解: (1) $f'(x) = \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x} = \frac{(x-1)(x-a)}{x}$.

由题意得, 当 $x_0 > 0$ 时, $\frac{x_0^2 - (a+1)x_0 + a}{x_0} > \frac{3+3a-a^2}{x_0} - 3a - 1$ 恒成立,

即当 $x_0 > 0$ 时, $x_0^2 + 2ax_0 + a^2 - 2a - 3 > 0$ 恒成立,

设函数 $F(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 2a - 3 (x > 0)$, 则其对称轴方程为 $x = -a, F(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

若 $-a \leq 0$, 即 $a \geq 0$, 则 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore F(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,
 $\therefore a^2 - 2a - 3 \geq 0$, 解得 $a \geq 3$;
 若 $a < 0$, 则 $F(-a) > 0$, 即 $-2a - 3 > 0$, 解得 $a < -\frac{3}{2}$.

综上可得 $a < -\frac{3}{2}$ 或 $a \geq 3$ 6 分

(2) 若 $a = -1$, 则 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - f(x) = \ln x$, 由于 $x_1 \neq x_2$, 不妨先设 $x_1 > x_2 > 0$,

令 $t = \frac{x_1}{x_2}$, $f(t) = \frac{2}{t+1} + \frac{\ln t}{2} (t > 1)$,

$f'(t) = \frac{-2}{(t+1)^2} + \frac{1}{2t} = \frac{-4t + (t+1)^2}{2t(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{2t(t+1)^2} > 0$, 故 $f(t) = \frac{2}{t+1} + \frac{\ln t}{2}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(t) > f(1) = 1$, 即 $\frac{2}{\frac{x_1}{x_2} + 1} + \frac{\frac{\ln x_1}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1} + 1} > 1$, $\therefore \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{2} > \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$,

$\therefore \frac{[g(x_1) - g(x_2)](x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} > 2$,

$\therefore k(x_1 + x_2) > 2$ 得证.

综上可知, 原命题得证. 12 分

22. 解析: (1) $\because$ 直线 $3x - y + 3\sqrt{2} = 0$ 与 x 轴的交点为 $(-\sqrt{2}, 0)$, $\therefore c = \sqrt{2}$, $\therefore \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a + b = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$,

$\therefore$ 解得 $a = 2, b = \sqrt{2}$, $\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 4 分

(2) 若直线 l 的斜率不存在, 则 $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

若直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, 代入椭圆方程可得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 4 = 0$
 设 $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1 + 2k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{2(m^2 - 2)}{1 + 2k^2}, y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{1 + 2k^2}$.

由题意点 O 为 $\triangle PAC$ 的重心, 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_1 + x_2 + x_0}{3} = 0, \frac{y_1 + y_2 + y_0}{3} = 0$,

所以 $x_0 = -(x_1 + x_2) = \frac{4km}{1 + 2k^2}, y_0 = -(y_1 + y_2) = -\frac{2m}{1 + 2k^2}$,

代入椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 得 $\frac{4k^2m^2}{(1 + 2k^2)^2} + \frac{2m^2}{(1 + 2k^2)^2} = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1 + 2k^2}{2}$,

设坐标原点 O 到直线 l 的距离为 d ,

则 $\triangle PAC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |AC| \cdot 3d$

$= \frac{1}{2} \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| \cdot 3 \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}}$

$= \frac{3}{2} |x_1 - x_2| \cdot |m|$

$= \frac{3}{2} \sqrt{(-\frac{4km}{1 + 2k^2})^2 - 4} \cdot \frac{2(m^2 - 2)}{1 + 2k^2} \cdot |m|$

$= \frac{3}{2} \frac{2\sqrt{2} \sqrt{2(1 + 2k^2) - m^2}}{1 + 2k^2} \cdot |m|$

$= 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2(1 + 2k^2) - \frac{1 + 2k^2}{2}}}{1 + 2k^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2k^2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

综上可得, $\triangle PAC$ 面积 S 为定值 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 12 分