

“皖南八校”2021 届高三摸底联考

数 学 (理科)

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。第Ⅰ卷每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;第Ⅱ卷请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 本卷命题范围:必修全册+选修 2-1,2-2。

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

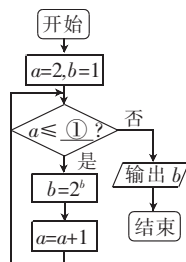
1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x^2\geq 1\}$, $B=\{x|x\leq 0\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B=$
A. $(-1,1)$ B. $(0,1]$ C. $(-1,0)$ D. $(-1,0]$
2. 已知命题 $p: \exists m\in\mathbf{R}, f(x)=3^x-m\log_2 x$ 是增函数, 则 $\neg p$ 为
A. $\exists m\in\mathbf{R}, f(x)=3^x-m\log_2 x$ 是减函数
B. $\forall m\in\mathbf{R}, f(x)=3^x-m\log_2 x$ 是增函数
C. $\exists m\in\mathbf{R}, f(x)=3^x-m\log_2 x$ 不是增函数
D. $\forall m\in\mathbf{R}, f(x)=3^x-m\log_2 x$ 不是增函数
3. 已知双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的两条渐近线互相垂直, 且焦距为 $2\sqrt{6}$, 则抛物线 $y^2=2bx$ 的准线方程为
A. $x=-\sqrt{3}$ B. $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $y=-\sqrt{3}$ D. $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 已知向量 $\mathbf{a}=(2,2)$, $\mathbf{b}=(1,x)$, 若 $\mathbf{a}\parallel(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$, 则 $|\mathbf{b}|=$
A. 10 B. 2 C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{2}$
5. 将函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后, 所得图象对应的函数为
A. $g(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{12})$ B. $g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$
C. $g(x)=2\sin(2x-\frac{7\pi}{12})$ D. $g(x)=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$

6. 我国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题(意为):“有一个人要走 378 里路,第一天健步行走,从第二天起因脚痛每天走的路程为前一天的一半,走了 6 天后到达目的地.”那么,此人第 3 天和第 4 天共走路程是

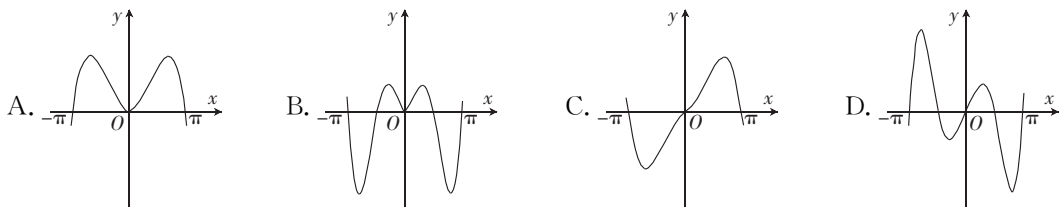
A. 72 里 B. 60 里 C. 48 里 D. 36 里

7. 执行右边的程序框图,为使输出的 b 的值为 16,则循环体的判断框内①处应填的整数为

A. 3
B. 4
C. 5
D. 6



8. 函数 $y=2^{|x|} \sin 2x$ 的图象可能是

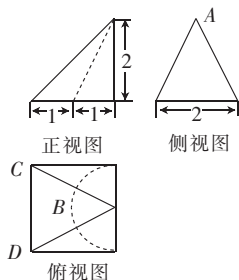


9. 若正实数 x, y 满足 $2x+y+xy-6=0$,则 $2x+y$ 的最小值为

A. $4(\sqrt{5}+1)$ B. $4(\sqrt{5}-1)$ C. 12 D. 4

10. 某空间几何体的三视图如图所示,则该几何体中直线 AB (点 B 为俯视图中矩形的中心)与平面 ACD 所成角的余弦值为

A. $\frac{4}{5}$
B. $\frac{3}{5}$
C. $\frac{3}{10}$
D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$



11. 已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 满足 $f(-x)=2-f(x)$,若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{2020}, y_{2020})$,则交点的所有横坐标和纵坐标之和为

A. 1010 B. -2020 C. 2020 D. 4040

12. 若曲线 $f(x)=\frac{e^{x-2}}{ax+1}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线过点 $(-1, 0)$,则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为

A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(-\infty, -1), (-1, 0)$

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知复数 z 满足: $(1+i)^2 z = 4 - 2i^7$, 则 $|\bar{z}| =$ _____.

14. 已知点 M 的坐标 (x, y) 满足不等式组
$$\begin{cases} 2x + y - 4 \geq 0, \\ x - y - 2 \leq 0, \\ y - 3 \leq 0, \end{cases}$$
 N 为直线 $y = -2x + 2$ 上任一点, 则

$|MN|$ 的最小值是 _____.

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$, 若 $a_1 = d, b_1 = d^2$,

且 $\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{b_1 + b_2 + b_3}$ 是正整数, 则实数 $q =$ _____.

16. 已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - f(x+2) = 0$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x \cdot e^x$, 若在区间 $[-1, 3]$ 内, 函数 $g(x) = f(x) - kx - 2k + 1$ 有且仅有 3 个零点, 则实数 k 的取值范围是 _____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在三角形 ABC 中, 已知角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \sin A + c \sin C - a \sin C = b \sin B$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $b = \sqrt{3}$, 求三角形 ABC 面积的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$, 等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $2d$, 设 A_n, B_n 分别是数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, 且 $b_1 = 3, A_2 = 3, A_5 = B_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

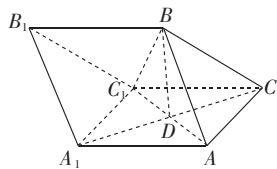
(2) 设 $c_n = b_n + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $S_n < (n+1)^2$.

19. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC_1$ 是边长为 2 的等边三角形,平面 $ABC_1 \perp$ 平面 AA_1C_1C , 四边形 AA_1C_1C 为菱形, $\angle AA_1C_1 = 60^\circ$, AC_1 与 A_1C 相交于点 D .

(1) 求证: $BD \perp C_1C$.

(2) 求平面 ABC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成锐二面角的余弦值.

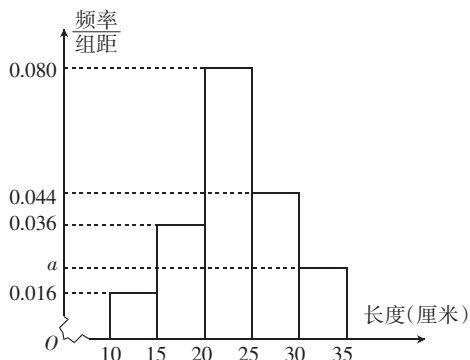


20. (本小题满分 12 分)

某工厂生产了一批零件,从中随机抽取 100 个作为样本,测出它们的长度(单位:厘米),按数据分成 $[10, 15]$, $(15, 20]$, $(20, 25]$, $(25, 30]$, $(30, 35]$ 5 组,得到如图所示的频率分布直方图.以这 100 个零件的长度在各组的频率代替整批零件长度在该组的概率.

(1) 估计该工厂生产的这批零件长度的平均值(同一组中的每个数据用该组区间的中点值代替);

(2) 若用分层抽样方式从第 1 组和第 5 组中抽取 5 个零件,再从这 5 个零件中随机抽取 2 个,求抽取的零件中恰有 1 个是第 1 组的概率.



21. (本小题满分 12 分)

已知点 $P(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + a \ln x$ 上任意一点, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若在曲线 $y = f(x)$ 上点 P 处的切线的斜率恒大于 $\frac{3+3a-a^2}{x_0} - 3a - 1$, 求实数 a 的取值范围.

(2) 点 $A(x_1, g(x_1))$, $B(x_2, g(x_2))$ 是曲线 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - f(x)$ 上不同的两点, 设直线 AB 的斜率为 k . 若 $a = -1$, 求证: $k(x_1 + x_2) > 2$.

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点 F 在直线 $3x - y + 3\sqrt{2} = 0$ 上, 且 $a + b = 2 + \sqrt{2}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 直线 l 与椭圆交于 A , C 两点, 线段 AC 的中点为 M , 射线 MO 与椭圆交于点 P , 点 O 为 $\triangle PAC$ 的重心, 探求 $\triangle PAC$ 面积 S 是否为定值, 若是, 则求出这个值; 若不是, 则求 S 的取值范围.