

“四省八校”2021 届高三第一学期开学考试

数 学(文科)

2020.9

命审单位:四川省南充高级中学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 0\}$, $N = \{(x, y) | (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$, 则 $M \cap N$ 中元素个数为

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. i 是虚数单位,若复数 z 满足 $\frac{z}{1-i} = \frac{1}{1+i}$, 则 $|z|$ 的值为

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 直线的方向用一个与该直线平行的非零向量来表示,该向量称为这条直线的方向向量。若向量 $\vec{a} = (1, x)$, $\vec{b} = (-2, 1-x)$ 均为直线 l 的方向向量,则 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$

A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 0 D. -1

4. 具有线性相关关系的两个变量 x, y 的取值如下表

x	1	2	3	4	5
y	5	t	m	10	12

其回归直线 $\hat{y} = bx + \hat{a}$ 经过点 $(3, 8)$ 的一个充分不必要条件是

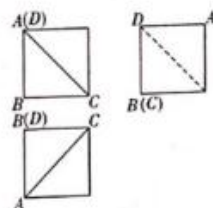
A. $t + m = 13$ B. $t = m = 6$ C. $t = m = 7$ D. $t = 6, m = 7$

5. 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上一点 P 到 C 的焦点 F 的距离为 4, 则 P 点的纵坐标为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 某几何体的三视图如图所示,三个视图中的四边形都是边长相等的正方形,则在该几何体中,直线 AB 与直线 CD 所成角为

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$



7. 若 $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2$, 则 $\sin 2\theta$ 的值为

A. $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

8. 设函数 $f(x) = x + g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 且在 $f(x)$ 图象上的点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -x + 2$, 则 $g(1) + g'(1)$ 的值为

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

9. P 是双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上一点, 以线段 PO (O 为坐标原点) 为直径的圆与该双曲线的两条渐近线分别交于不同于原点的 A, B 两点, 则四边形 $PAOB$ 的面积为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

10. 设 P_1, P_2 是两个命题, $P_1: \exists T \in \mathbf{R}$ 且 $T \neq 0, |\sin(x+T)| = |\sin x| (x \in \mathbf{R})$. $P_2: \forall x \in \mathbf{R}, \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$, 则下列为真命题的是

- A. $P_1 \wedge \neg P_2$ B. $\neg P_1 \vee P_2$ C. $P_1 \wedge P_2$ D. $\neg P_1 \wedge \neg P_2$

11. 公差非零的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_3| = |a_8|$, 则下列结论正确的是

- A. $S_{11} = 0$ B. $S_n = S_{11-n} (1 \leq n \leq 10)$
C. 当 $S_{11} > 0$ 时, $S_n \geq S_5$ D. 当 $S_{11} < 0$ 时, $S_n \geq S_5$

12. 函数 $f(x) = x^3 - bx^2 + c$, 若 $f(1-x) + f(1+x) = 2t$ (t 为实常数), 则下列结论错误的是

- A. $f(\ln 2) + f(\ln 4) > 2t$ B. $f(-2) + f(5) > 2t$
C. $f(\ln 2) + f(\ln 3) > 2t$ D. $f(-1) + f(2) < 2t$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 当 x 在 $[-3, 4]$ 随机取值时, $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ 的概率为 _____.

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x + a \end{cases}$, 若 $z = 3x - y$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$, 则 $a =$ _____.

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = m - q^n$, 若 $a_5 = -8a_2$, 则 $S_5 =$ _____.

16. 已知 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$, 则 $x+y$ 的取值范围为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 的中点, 且 $AB = \sqrt{3}, AD = 1, \angle ADB = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

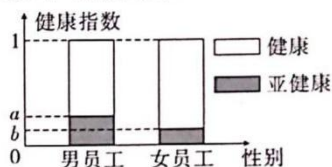
(2) 求 AC .

18. (12 分)

据我国一项专题调查显示,北京市高级职称的中年知识分子中竟有高达 75.3% 的人处于亚健康状态,更令人担忧的是 85% 以上的企业管理者处于慢性疲劳状态或亚健康状态,这是由他们所处的特殊工作,生活环境和行为模式所决定的。亚健康是指非病非健康的一种临界状态,如果这种状态不能及时得到纠正,非常容易引起身心疾病。某高科技公司为了了解亚健康与性别的关系,对本公司部分员工进行了不记名问卷调查。该公司处于正常工作状态的员工(包括管理人员)共有 8000 人,其中男性员工有 6000 人,女性员工有 2000 人,从 8000 人中用分层抽样的方法随机抽取了 400 人的样本,以调查健康状况

(1) 求男性员工、女性员工各抽取多少人?

(2) 通过不记名问卷调查方式,得到如下等高条形图:



其中 $a=0.2$ 、 $b=0.1$, 根据以上等高条形图, 完成下列 2×2 列联表:

	健康	亚健康	总计
男员工			
女员工			
总计			400

问能否有 97.5% 的把握认为亚健康与性别有关?

$$\text{参考公式: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d$$

参考数据:

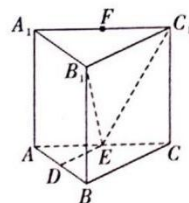
$P(K \geq k_0)$	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879

19. (12 分)

如图在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BA=BC$, $BA \perp BC$, 且 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , D 、 E 、 F 分别是棱 AB 、 AC 、 A_1C_1 的中点.

(1) 求证: 平面 $ABC \cap$ 平面 $EB_1C_1 = DE$;

(2) 若 $AB=2$, $AA_1=AC$, 求三棱锥 $E-A_1DF$ 的体积.



20. (12 分) 已知圆锥曲线 $E: \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4$, 经过点 $Q(-4, 4)$ 的直线 l 与 E 有唯一公共点 P , 定点 $R(-1, 0)$.

(1) 求 E 的标准方程;

(2) 设直线 PR, QR 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 k_2$ 的值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{(1+x)(1+\ln x)}{x}$, $g(x) = \ln x - mx$ ($m \in \mathbf{R}$).

(1) 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $m > 0$ 时, 对任意 $x_1 \in [1, 2]$, 存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) - 3m > g(x_2)$ 成立, 试求实数 m 的取值范围.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑.

22. (10 分) 选修 4-4: 极坐标与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 在极坐标中, 曲线 C_1 :

$\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -1$, 曲线 $C_2: \rho^2 \cos 2\theta = 2$, 点 $A(2, -\pi)$, $B(2, 2\pi)$.

(1) 将曲线 C_1, C_2 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 设 P 是 C_1, C_2 的公共点, 求点 P 的极坐标以及 $|PA| - |PB|$ 的值.

23. (10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设不等式 $|x-1| + |x-2| \leq 5$ 的解集为 M .

(1) 求 M ;

(2) 若 $x \in M$, 求证: $||2x-3| - |x-2|| \leq 3$.