

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 3 月测试

理科数学试卷（一卷）

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。



扫码查成绩

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ ，则抛物线 C 的焦点到准线的距离为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

2. 已知集合 $M = \{x | x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$, $N = \{x | 2^x > 4\}$ ，则

- A. $M \cup N = \mathbf{R}$ B. $M \cap N = \{x | 2 < x < 4\}$
C. $M \cup N = \{x | x > 2\}$ D. $M \cap N = \{x | 2 < x \leq 4\}$

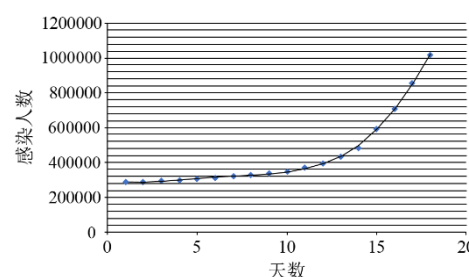
3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_2 + a_5 + a_8 = 15$ ，则 $a_3 + a_7 =$

- A. 3 B. 5 C. 7 D. 10

4. 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (-1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (3, m)$ 。若 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$ ，则实数 m 的值为

- A. $\frac{3}{2}$ B. 4 C. $-\frac{3}{2}$ D. -4

5. 某个国家某种病毒传播的中期，感染人数 y 和时间 x （单位：天）在 18 天里的散点图如图所示，下面四个回归方程类型中最适宜作为感染人数 y 和时间 x 的回归方程类型的是



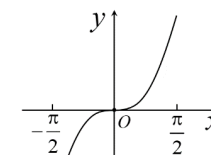
- A. $y = a + bx$ B. $y = a + be^x$ C. $y = a + b \ln x$ D. $y = a + b\sqrt{x}$

6. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边边长分别为 a, b, c ，若 $2a = 3b, A = 2B$ ，则 $\cos B =$

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. 0

7. 已知函数 $f(x)$ 的局部图象如图所示，则下列选项中可能是函数 $f(x)$ 解析式的是

- A. $y = x^2 \cos x$ B. $y = x \cos x$
C. $y = x^2 \sin x$ D. $y = x \sin x$



（第 7 题图）

8. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 2, \\ x + y \geq 2, \\ x + 2y \leq 4, \end{cases}$ 则 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的最大值为

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. 4 D. 5

9. 若 $x^4 + (x+1)^7 = a_0 + a_1(x+2) + a_2(x+2)^2 + \dots + a_7(x+2)^7$ ，则 $a_3 =$

- A. 27 B. 35 C. -8 D. -43

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} - 1, & x \geq 0, \\ -\log_a(-x), & x < 0, \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，若函数图象上关于原点对称的点至少有 3 对，则实数 a 的取值范围是

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, 1\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$

11. 在棱长为 $4\sqrt{2}$ 的正四面体 $A-BCD$ 中，点 E, F 分别为直线 AB, CD 上的动点，点 P 为 EF 中点， Q 为正四面体中心（满足 $QA = QB = QC = QD$ ），若 $PQ = \sqrt{2}$ ，则 EF 长度为

- A. $2\sqrt{6}$ B. $\sqrt{6}$ C. 3 D. 2

12. 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1, a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，则 $a^3 + b^3 + c^3$ 的最小值是

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. 1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{1-i}{1+2i}$ （其中 i 是虚数单位）的共轭复数为_____。

14. 已知函数 $f(x) = \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) - \frac{1}{2}, x \in [0, \pi]$ ，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为_____。

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点为 F_1, F_2 , P 是双曲线上一点, 且 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$. 若

$\triangle F_1 P F_2$ 的外接圆和内切圆的半径分别为 R, r , 且 $R = 4r$, 则双曲线的离心率为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$. 若对任意的 $x \in [1, +\infty)$ 不等式

$f(x)g(x-1) < 2 - f(x)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且 $S_n - a_n = (n-1)^2, b_n = \frac{2^{a_n}}{S_n^2}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

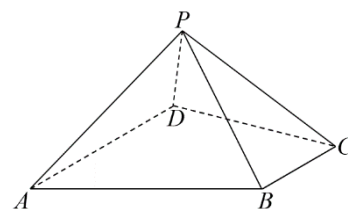
(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的最小项的值.

18. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 平面 $PAD \perp$

平面 PBC . 若 $\angle BCD = \frac{\pi}{3}, \angle PBC = \frac{\pi}{2}, AD = CD = 2, BC = 1$.

(1) 证明: $PB \perp PA$;

(2) 若 $PA = 2PC$, 求二面角 $P-BC-A$ 的余弦值.



(第 18 题图)

19. (12 分) 袋中有大小完全相同的 7 个白球, 3 个黑球.

(1) 若甲一次性抽取 4 个球, 求甲至多抽到一个黑球的概率;

(2) 若乙共抽取 4 次, 每次抽取 1 个球, 记录好球的颜色后再放回袋子中, 等待下次抽取, 且

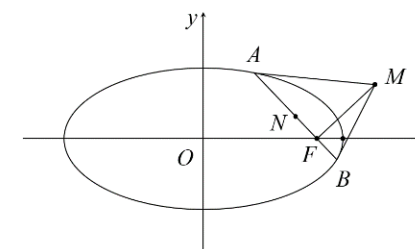
规定抽到白球得 10 分, 抽到黑球得 20 分, 求乙总得分 X 的分布列和数学期望.

20. (12 分) 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 原点为 O , 椭圆的动弦 AB 过焦点 F

且不垂直于坐标轴, 弦 AB 的中点为 N , 椭圆 C 在点 A, B 处的两切线的交点为 M .

(1) 求证: O, M, N 三点共线;

(2) 求 $\frac{|AB| \cdot |FM|}{|FN|}$ 的最小值.



(第 20 题图)

21. (12 分) 已知 $f(x) = \ln(x+1) - ax$ 在 $(0, +\infty)$ 有零点 x_0 .

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求证: $2\left(\frac{1}{a} - 1\right) < x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. (10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{4k}{1+k^2}, \\ y = \frac{2(1-k^2)}{1+k^2}, \end{cases}$ (k 为参数). 以原点 O 为极

点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = \frac{2}{\sqrt{3+\cos 2\theta - \sin^2 \theta}}$.

(1) 直接写出曲线 C_2 的普通方程;

(2) 设 A 是曲线 C_1 上的动点, B 是曲线 C_2 上的动点, 求 $|AB|$ 的最大值.

23. (10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知 a, b, c 均为正数, 函数 $f(x) = |x-a| + |x+b| + c$ 的最小值为 1.

(1) 求 $2a^2 + 3b^2 + 6c^2$ 的最小值;

(2) 求证: $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} > \frac{3}{2}$.