

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 3 月测试

理科数学试卷（一卷）参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	D	B	B	B	C	B	A	A	A	B

二、填空题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分。

13. $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

14. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

15. $\frac{2}{7}\sqrt{21}$

16. $a \in (0, 1) \cup (3, +\infty)$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. 解：

(1) $\because a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2), \therefore S_n - a_n = S_{n-1}$, 则 $S_{n-1} = (n-1)^2 (n \geq 2)$,

即 $S_n = n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$ 3 分

$\therefore a_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1 (n \geq 2)$ 5 分

经检验 $a_1 = 1$ 适合, $\therefore a_n = 2n-1$ 6 分

(2) 易知 $b_n > 0, \therefore b_n = \frac{2^{2n-1}}{n^4}, b_{n+1} = \frac{2^{2n+1}}{(n+1)^4},$

$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^2 n^4}{(n+1)^4} = \left(\frac{\sqrt{2}n}{n+1}\right)^4$ 8 分

当 $\frac{\sqrt{2}n}{n+1} > 1$ 时, $n > \sqrt{2} + 1,$

所以当 $1 \leq n < 3$ 时, $b_n > b_{n+1}$, 当 $n \geq 3$ 时, $b_n < b_{n+1}$ 10 分

又 $b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{32}{81}$, 所以当 $n = 3$ 时, b_n 有最小值 $\frac{32}{81}$ 12 分

18. 解:

(1) 证明: 设平面 $PAD \cap$ 平面 $PBC = l$,

$\because AD \parallel BC, BC \not\subset$ 平面 $PAD, AD \subset$ 平面 $PAD, \therefore BC \parallel$ 平面 PAD ,

又 $\because BC \subset$ 平面 $PBC, \therefore BC \parallel l$ 2 分

$\because \angle PBC = \frac{\pi}{2}, \therefore PB \perp BC, \therefore PB \perp l$ 4 分

又因为平面 $PAD \perp$ 平面 $PBC, \therefore PB \perp$ 平面 PAD , 可得 $PB \perp PA$, 得证.

.....6 分

(2) 解: 连结 BD , 在 $\triangle BCD$ 中, 易得 $BD = \sqrt{3}, \therefore BD \perp BC$,

又 $\because PB \perp BC, \therefore \angle PBD$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角8 分

以 D 为原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$ 的方向为 x 轴, y 轴正方向, 建立空间直角坐标系,

$\therefore A(2, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), C(-1, \sqrt{3}, 0),$

$\because BC \perp BD, BC \perp PD, BD \cap PD = D, \therefore BC \perp$ 平面 PBD ,

所以平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ 9 分

可设 $P(0, y, z)$. 由 $PA = 2PC$ 可得:

$$(0-2)^2 + y^2 + z^2 = 4(0+1)^2 + 4(y-\sqrt{3})^2 + 4z^2,$$

化简可得: $3y^2 - 8\sqrt{3}y + 3z^2 + 12 = 0 \dots \textcircled{1}$

由 (1) 知 $PB \perp PA, \therefore (-2, y, z) \cdot (0, y - \sqrt{3}, z) = 0$, 化简得 $y^2 - \sqrt{3}y + z^2 = 0 \dots \textcircled{2}$

解方程 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 可得 $y = \frac{4}{5}\sqrt{3}, z = \frac{2}{5}\sqrt{3}$ 11 分

$\therefore \sin \angle PBD = \frac{z}{PB} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\cos \angle PBD = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分

19. 解:

(1) 甲是无放回地抽取, 甲至多抽到一个黑球: 基本事件 {没有抽到黑球, 抽到一个黑球},

$$\therefore P\{\text{没有抽到黑球}\} = \frac{C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$P\{\text{抽到一个黑球}\} = \frac{C_7^3 C_3^1}{C_{10}^4} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以甲至多抽到一个黑球的概率为: } \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 解法一:

乙是有放回地抽取, 抽到白球得 10 分, 抽到黑球得 20 分,

所以抽取 4 次 {4 个白球, 3 个白球 1 个黑球, 2 个白球 2 个黑球, 1 个白球 3 个黑球, 4 个黑球},

对应的 X 取值有 {40, 50, 60, 70, 80}; 而每次抽到白球、黑球的概率分别为 $\frac{7}{10}, \frac{3}{10}$,

设 4 次取球取得黑球次数为 r , 则 r 的可能取值 0, 1, 2, 3, 4 6 分

$$\therefore P(X = 40 + 10r) = C_4^r \left(\frac{7}{10}\right)^{4-r} \left(\frac{3}{10}\right)^r, \text{ 即可得分布列如下:}$$

X	40	50	60	70	80
P	$\frac{2401}{10000}$	$\frac{4116}{10000}$	$\frac{2646}{10000}$	$\frac{756}{10000}$	$\frac{81}{10000}$

..... 10 分

$$\therefore E(X) = 40 \times \frac{2401}{10000} + 50 \times \frac{4116}{10000} + 60 \times \frac{2646}{10000} + 70 \times \frac{756}{10000} + 80 \times \frac{81}{10000} = 52$$

..... 12 分

解法二:

设 4 次取球取得黑球数为 Y , 则 $X = 40 + 10Y$, 且 $Y \sim B\left(4, \frac{3}{10}\right)$ 8 分

$$EX = 40 + 10EY = 40 + 10 \times 4 \times \frac{3}{10} = 52 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解:

(1) 椭圆的右焦点 $F(2,0)$,

设 AB 所在的直线的方程为 $y = k(x-2)$ ($k \neq 0$), 且 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

.....1 分

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y = k(x-2), \\ \frac{x^2}{5} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 可得: } (5k^2 + 1)x^2 - 20k^2x + (20k^2 - 5) = 0$$

.....3 分

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{20k^2}{5k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{20k^2 - 5}{5k^2 + 1}, \text{ 点 } N \text{ 的坐标为 } \left(\frac{10k^2}{5k^2 + 1}, \frac{-2k}{5k^2 + 1} \right),$$

$$\therefore ON \text{ 所在的直线的方程为 } y = -\frac{1}{5k}x \text{5 分}$$

$$\text{椭圆 } C \text{ 在 } A, B \text{ 处的切线方程分别为 } \frac{x_1x}{5} + y_1y = 1, \frac{x_2x}{5} + y_2y = 1,$$

$$\text{联立方程组} \begin{cases} \frac{x_1x}{5} + y_1y = 1, \\ \frac{x_2x}{5} + y_2y = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得点 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5(y_2 - y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1}, \frac{x_1 - x_2}{x_1y_2 - x_2y_1} \right), M \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2k} \right),$$

$$\text{所以点 } M \text{ 的坐标满足直线 } ON \text{ 的方程 } y = -\frac{1}{5k}x, \text{ 故 } O, M, N \text{ 三点共线}$$

.....7 分

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{5}(1+k^2)}{5k^2 + 1} \text{8 分}$$

$$|FM| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \left| \frac{5}{2} - 2 \right| = \frac{\sqrt{1+k^2}}{2|k|} \text{9 分}$$

$$|FN| = \sqrt{1+k^2} \left| \frac{10k^2}{5k^2 + 1} - 2 \right| = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{5k^2 + 1} \text{10 分}$$

$$\therefore \frac{|AB| \cdot |FM|}{|FN|} = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{k^2 + 1}{|k|} \geq \sqrt{5},$$

当且仅当 $|k| = 1$ 时, 等号成立.....12 分

21. 解:

(1) $f(x) = \ln(x+1) - ax, f'(x) = \frac{1}{x+1} - a$ 1 分

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - a \geq 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立,

$\therefore f(x) = \ln(x+1) - ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, $\therefore f(x) > f(0) = 0$, 不符合题意,

.....2 分

②当 $0 < a < 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - a \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{a} - 1$,

$\therefore f(x) = \ln(x+1) - ax$ 在 $\left(0, \frac{1}{a} - 1\right)$ 上递增, 在 $\left(\frac{1}{a} - 1, +\infty\right)$ 上递减,

$\therefore f\left(\frac{1}{a} - 1\right) > f(0) = 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 满足题意.....4 分

③当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - a < 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立,

$\therefore f(x) = \ln(x+1) - ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减, $\therefore f(x) < f(0) = 0$, 不符合题意.

.....6 分

综上所述, a 的取值范围是 $(0, 1)$.

(2) 由 (1) 知 $0 < a < 1, \therefore a = \frac{\ln(x_0+1)}{x_0}$,

要证明 $x_0 > 2\left(\frac{1}{a} - 1\right)$, 只要证明 $\ln(x_0+1) > \frac{2x_0}{x_0+2}$ 7 分

设 $g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}, x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \geq 0,$$

$g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} > g(0) = 0$, 即 $x_0 > 2\left(\frac{1}{a} - 1\right)$ 9 分

另一方面：证法一：要证明 $x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$ ，只要证明 $\ln(x_0 + 1) < \frac{1}{a}$ ，

即证明 $\ln(x_0 + 1) < \frac{x_0}{\ln(x_0 + 1)}$ 10 分

$\because \ln(x_0 + 1) > 0$ ，即证 $\ln(x_0 + 1) < \sqrt{x_0}$ ，

设 $h(x) = \ln(x + 1) - \sqrt{x}, x > 0$ ，

则 $h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ ，

所以当 $x > 0$ 时， $h(x) < h(0) = 0$ ，即 $x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$ 12 分

证法二：因为在 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a} - 1, +\infty\right)$ 上递减，且 $e^{\frac{1}{a}} - 1 > \frac{1}{a} - 1, x_0 > \frac{1}{a} - 1$ ，

要证明 $x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$ ，只要证明 $f(x_0) > f\left(e^{\frac{1}{a}} - 1\right)$ ，即证 $\frac{1}{a} - ae^{\frac{1}{a}} + a < 0$

.....10 分

设 $\varphi(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}, x > 1, \varphi'(x) = \frac{-(x-1)^2}{e^x} < 0$ ，

$\therefore \varphi(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x} < \varphi(1) = \frac{2}{e} < 1$ ，

所以当 $x > 1$ 时， $e^x > x^2 + 1$ ，

即当 $0 < a < 1$ 时， $e^{\frac{1}{a}} > \frac{1}{a^2} + 1$ ，

$\therefore x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$ 12 分

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题。作答如果多做，则按所做的第一题计分。

22. 解：

(1) 曲线 C_2 的普通方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 2 分

(2) 由曲线 C_1 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \frac{4k}{1+k^2}, \\ y = \frac{2(1-k^2)}{1+k^2}, \end{cases} \quad (k \text{ 为参数}),$$

得曲线 C_1 的普通方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$,

它是一个以 $C(2,0)$ 为圆心, 半径等于 2 的圆,

.....4 分

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = \frac{2}{\sqrt{3+\cos 2\theta - \sin^2 \theta}}$.

$\therefore \rho^2(3+\cos 2\theta - \sin^2 \theta) = 4$, 可得 $4x^2 + y^2 = 4$ 6 分

则曲线 C_2 的参数方程为:
$$\begin{cases} x = \cos \beta, \\ y = 2 \sin \beta, \end{cases} \quad (\beta \text{ 为参数}),$$

$\therefore A$ 是曲线 C_1 上的点, B 是曲线 C_2 上的点, $\therefore |AB|_{\max} = |BC|_{\max} + 2$

.....8 分

设 $B(\cos \beta, 2 \sin \beta)$, 则 $|BC| = \sqrt{(\cos \beta - 2)^2 + 4 \sin^2 \beta} = \sqrt{-3 \cos^2 \beta - 4 \cos \beta + 8}$

$$= \sqrt{-3 \left(\cos \beta + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{28}{3}},$$

当 $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ 时, $|BC|_{\max} = \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$, $\therefore |AB|_{\max} = \frac{2\sqrt{21}}{3} + 2$ 10 分

23. 解:

(1) $f(x) = |x-a| + |x+b| + c \geq |x-a-x-b| + c = |a+b| + c = a+b+c = 1$

.....2 分

$$\therefore \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) (2a^2 + 3b^2 + 6c^2) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}a + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}b + \frac{1}{\sqrt{6}} \times \sqrt{6}c \right)^2 = 1,$$

$\therefore 2a^2 + 3b^2 + 6c^2 \geq 1$, 即 $2a^2 + 3b^2 + 6c^2$ 的最小值为 15 分

(2) $\therefore \sqrt{a^2 + ab + b^2} = \sqrt{\left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(a + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2} \right)$ 7 分

$$\therefore \sqrt{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(b + \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{3}c}{2} \right), \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(c + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{2} \right),$$

因此 $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2}$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(a + b + c + \frac{a+b+c}{2} + \frac{a+b+c}{2} \times \sqrt{3} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) > \frac{3}{2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$