

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 3 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。



扫码查成绩

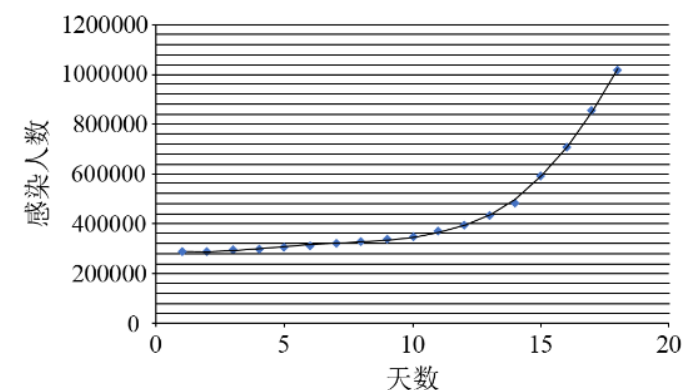
一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知抛物线  $C: y^2 = 2x$ ，则抛物线  $C$  的焦点到准线的距离为  
A.  $\frac{1}{4}$  B.  $\frac{1}{2}$  C. 1 D. 2
- 已知集合  $M = \{x | x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$ ,  $N = \{x | 2^x > 4\}$ ，则  
A.  $M \cup N = \mathbf{R}$  B.  $M \cap N = \{x | 2 < x < 4\}$   
C.  $M \cup N = \{x | x > 2\}$  D.  $M \cap N = \{x | 2 < x \leq 4\}$
- 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足：  $a_2 + a_5 + a_8 = 15$ ，则  $a_3 + a_7 =$   
A. 3 B. 5 C. 7 D. 10
- 已知向量  $\overrightarrow{OA} = (-1, 2)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (3, m)$ 。若  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$ ，则实数  $m$  的值为  
A.  $\frac{3}{2}$  B. 4 C.  $-\frac{3}{2}$  D. -4
- 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \leq 2, \\ x + y \geq 2, \\ x + 2y \leq 4, \end{cases}$  则  $\sqrt{x^2 + y^2}$  的最大值为  
A. 2 B.  $\sqrt{5}$  C. 4 D. 5
- 若  $x^4 + (x+1)^7 = a_0 + a_1(x+2) + a_2(x+2)^2 + \cdots + a_7(x+2)^7$ ，则  $a_3 =$   
A. 27 B. 35 C. -8 D. -43
- 已知函数  $f(x) = -x^2 + bx + c$ ，则 “ $f\left(f\left(\frac{b}{2}\right)\right) > 0$ ” 是 “方程  $f(x) = 0$  有两个不同实数解且方程  $f(f(x)) = 0$  恰有两个不同实数解” 的  
A. 充要条件 B. 充分不必要条件  
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

- 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} - 1, & x \geq 0, \\ -\log_a(-x), & x < 0, \end{cases}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )，若函数图象上关于原点对称的点至少有 3 对，则实数  $a$  的取值范围是  
A.  $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$  B.  $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, 1\right)$  C.  $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$  D.  $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$

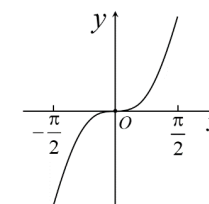
有 3 对，则实数  $a$  的取值范围是

- 二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对得 5 分，选对但不全的得 3 分，有选错的得 0 分。
- 某个国家某种病毒传播的中期，感染人数  $y$  和时间  $x$  (单位：天) 在 18 天里的散点图如图所示，下面四个回归方程类型中有可能适宜作为感染人数  $y$  和时间  $x$  的回归方程类型的是



(第 9 题图)

- 已知函数  $f(x)$  的局部图象如图所示，则下列选项中不可能是函数  $f(x)$  解析式的是  
A.  $y = x^2 \cos x$  B.  $y = x \cos x$   
C.  $y = x^2 \sin x$  D.  $y = x \sin x$



(第 10 题图)

11. 下列命题正确的是

- A. 若  $a > b$ , 则  $\forall c \in \mathbf{R}, ac > bc$       B. 若  $a > b$ , 则  $\exists c \in \mathbf{R}, ac > bc$   
C. 若  $a > b$ , 则  $\forall c \in \mathbf{R}, a+c > b+c$       D. 若  $a > b$ , 则  $\exists c \in \mathbf{R}, a > c, c > b$

12. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ , 下列关于函数  $f(x)$  的结论正确的为

- A.  $f(x)$  在定义域内有三个零点      B. 函数  $f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$   
C.  $f(x)$  在定义域内为周期函数      D.  $f(x)$  图象是中心对称图象

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.  $\frac{1-i}{1+2i}$  (其中  $i$  是虚数单位) 的共轭复数为\_\_\_\_\_.

14. 已知  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  的对边边长分别为  $a, b, c$ , 若  $2a = 3b, A = 2B$ , 则  $\cos B =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的焦点为  $F_1, F_2$ ,  $P$  是双曲线上一点, 且  $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$ . 若

$\triangle F_1PF_2$  的外接圆和内切圆的半径分别为  $R, r$ , 且  $R = 4r$ , 则双曲线的离心率为\_\_\_\_\_.

16. 在棱长为  $4\sqrt{2}$  的正四面体  $A-BCD$  中, 点  $E, F$  分别为直线  $AB, CD$  上的动点, 点  $P$  为  $EF$  中点,  $Q$  为正四面体中心 (满足  $QA = QB = QC = QD$ ), 若  $PQ = \sqrt{2}$ , 则  $EF$  长度为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x$ .

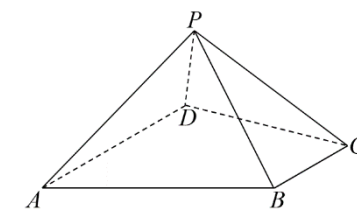
- (1) 求  $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$  的值;  
(2) 当  $x \in [0, \pi]$ , 求函数  $f(x)$  的单调递增区间.

18. (12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ , 且  $S_n - a_n = (n-1)^2, b_n = \frac{2^{a_n}}{S_n^2}$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{b_n\}$  的最小项的值.

19. (12 分) 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ , 平面  $PAD \perp$  平面  $PBC$ . 若  $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle PBC = \frac{\pi}{2}, AD = CD = 2, BC = 1$ .



(第 19 题图)

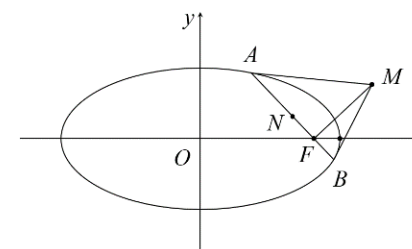
(1) 证明:  $PB \perp PA$ ;

(2) 若  $PA = 2PC$ , 求二面角  $P-BC-A$  的余弦值.

20. (12 分) 袋中有大小完全相同的 7 个白球, 3 个黑球.

- (1) 若甲一次性抽取 4 个球, 求甲至多抽到一个黑球的概率;  
(2) 若乙共抽取 4 次, 每次抽取 1 个球, 记录好球的颜色后再放回袋子中, 等待下次抽取, 且规定抽到白球得 10 分, 抽到黑球得 20 分, 求乙总得分  $X$  的分布列和数学期望.

21. (12 分) 如图, 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$  的右焦点为  $F$ , 原点为  $O$ , 椭圆的动弦  $AB$  过焦点  $F$  且不垂直于坐标轴, 弦  $AB$  的中点为  $N$ , 椭圆  $C$  在点  $A, B$  处的两切线的交点为  $M$ .



(第 21 题图)

(1) 求证:  $O, M, N$  三点共线;

(2) 求  $\frac{|AB| \cdot |FM|}{|FN|}$  的最小值.

22. (12 分) 已知  $f(x) = \ln(x+1) - ax$  在  $(0, +\infty)$  有零点  $x_0$ .

(1) 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 求证: (i)  $x_0 > 2\left(\frac{1}{a} - 1\right)$ ;

(ii)  $x_0 f(\ln(x_0 + 1)) < \left(e^{\frac{1}{a}} - 1\right)(a - \ln a - 1)$ .