中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 3 月测试

数学试卷参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
C	D	D	B	B	B	C	B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对得 5 分，选对但不全的得 3 分，有选错的得 0 分．

9	10	11	12
BD	ABD	BCD	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$

14．$\frac{3}{4}$

15．$\frac{2}{7}\sqrt{21}$

16．$2\sqrt{6}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解：

（1）$\because f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$，

……………3 分

$\therefore f\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}$……………5 分

（2）$\because f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$，由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

……………7 分

$\therefore k\pi-\dfrac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right],\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$ ……………10 分

18．解：

（1）$\because a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge2),\therefore S_n-a_n=S_{n-1}$，则 $S_{n-1}=(n-1)^2\left(n\ge2\right)$，

即 $S_n=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$ ……………3 分

$\therefore a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1\left(n\ge2\right)$ ……………5 分

经检验 $a_1=1$ 适合，$\therefore a_n=2n-1$ ……………6 分

（2）易知 $b_n>0,\because b_n=\dfrac{2^{2n-1}}{n^4},b_{n+1}=\dfrac{2^{2n+1}}{\left(n+1\right)^4}$，

$\therefore\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2^2n^4}{(n+1)^4}=\left(\dfrac{\sqrt{2}n}{n+1}\right)^4$ ……………8 分

当 $\dfrac{\sqrt{2}n}{n+1}>1$ 时，$n>\sqrt{2}+1$，

所以当 $1\le n<3$ 时，$b_n>b_{n+1}$，当 $n\ge3$ 时，$b_n<b_{n+1}$ ……………10 分

又 $b_2=\dfrac{1}{2},b_3=\dfrac{32}{81}$，所以当 $n=3$ 时，b_n 有最小值 $\dfrac{32}{81}$ ……………12 分

19．解：

（1）证明：设平面 $PAD\cap$ 平面 $PBC=l$，

$\because AD//BC,BC\not\subset$ 平面 $PAD,AD\subset$ 平面 PAD，$\therefore BC//$ 平面 PAD，

又 $\because BC\subset$ 平面 $PBC,\therefore BC//l$ ……………2 分

$\because\angle PBC=\dfrac{\pi}{2},\therefore PB\perp BC,\therefore PB\perp l$ ……………4 分

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 PBC，

$\therefore PB\perp$ 平面 PAD，可得 $PB\perp PA$，得证……………6 分

（2）连结 BD，在$\triangle BCD$中，易得 $BD=\sqrt{3}$, $\therefore BD\perp BC$，

又$\because PB\perp BC$, $\therefore \angle PBD$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角……………8 分

以 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}$ 的方向为 x 轴，y 轴正方向建立空间直角坐标系，

$\therefore A(2,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $C(-1,\sqrt{3},0)$.

$\because BC\perp BD, BC\perp PD, BD\cap PD=D$, $\therefore BC\perp$ 平面 PBD，

所以平面 $PBD\perp$ 平面 $ABCD$……………9 分

可设 $P(0,y,z)$．由 $PA=2PC$，

可得：$(0-2)^2+y^2+z^2=4(0+1)^2+4(y-\sqrt{3})^2+4z^2$，

化简可得：$3y^2-8\sqrt{3}y+3z^2+12=0$①

由（1）知 $PB\perp PA$, $\therefore (-2,y,z)\cdot(0,y-\sqrt{3},z)=0$，

化简得: $y^2-\sqrt{3}y+z^2=0$②

解方程①②可得: $y=\dfrac{4}{5}\sqrt{3}$, $z=\dfrac{2}{5}\sqrt{3}$……………11 分

$\therefore \sin\angle PBD=\dfrac{z}{PB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos\angle PBD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$……………12 分

20．解：

（1）甲是无放回地抽取，甲至多抽到一个黑球：基本事件{没有抽到黑球，抽到一个黑球}，

$\therefore P\{$没有抽到黑球$\}=\dfrac{C_7^4}{C_{10}^4}=\dfrac{35}{210}=\dfrac{1}{6}$……………1 分

$P\{$抽到一个黑球$\}=\dfrac{C_7^3C_3^1}{C_{10}^4}=\dfrac{105}{210}=\dfrac{1}{2}$……………2 分

所以甲至多抽到一个黑球的概率为：$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$……………5 分

（2）解法一：

乙是有放回地抽取，抽到白球得 10 分，抽到黑球得 20 分，

所以抽取 4 次{4 个白球，3 个白球 1 个黑球，2 个白球 2 个黑球，1 个白球 3 个黑球，

4 个黑球}，

对应的 X 取值有 $\{40,50,60,70,80\}$，而每次抽到白球、黑球的概率分别为 $\frac{7}{10},\frac{3}{10}$，

设 4 次取球取得黑球次数为 r，则 r 的可能取值 $0,1,2,3,4$ ……………6 分

$\therefore P(X=40+10r)=C_4^r\left(\frac{7}{10}\right)^{4-r}\left(\frac{3}{10}\right)^r$，即可得分布列如下：

X	40	50	60	70	80
P	$\frac{2401}{10000}$	$\frac{4116}{10000}$	$\frac{2646}{10000}$	$\frac{756}{10000}$	$\frac{81}{10000}$

……………10 分

$$\therefore E\left(X\right)=40\times\frac{2401}{10000}+50\times\frac{4116}{10000}+60\times\frac{2646}{10000}+70\times\frac{756}{10000}+80\times\frac{81}{10000}=52$$

……………12 分

解法二：

设 4 次取球取得黑球数为 Y，则 $X=40+10Y$，且 $Y\sim B\left(4,\frac{3}{10}\right)$ ……………8 分

$EX=40+10EY=40+10\times4\times\frac{3}{10}=52$ ……………12 分

21．解：

（1）椭圆的右焦点为 $F(2,0)$，

设 AB 所在的直线的方程为 $y=k(x-2)$（$k\neq0$），且 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

……………1 分

联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{5}+y^2=1,\end{cases}$ 可得：$(5k^2+1)x^2-20k^2x+(20k^2-5)=0$ …………3 分

则 $x_1+x_2=\frac{20k^2}{5k^2+1},x_1x_2=\frac{20k^2-5}{5k^2+1}$，点 N 的坐标为 $\left(\frac{10k^2}{5k^2+1},\frac{-2k}{5k^2+1}\right)$，

$\therefore ON$ 所在的直线的方程为 $y=-\dfrac{1}{5k}x$ ……………5 分

椭圆 C 在 A,B 处的切线方程分别为 $\dfrac{x_1x}{5}+y_1y=1,\dfrac{x_2x}{5}+y_2y=1$，

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x_1x}{5}+y_1y=1,\\ \dfrac{x_2x}{5}+y_2y=1,\end{cases}$

解得点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{5(y_2-y_1)}{x_1y_2-x_2y_1},\dfrac{x_1-x_2}{x_1y_2-x_2y_1}\right),M\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2k}\right)$，

所以点 M 的坐标满足直线 ON 的方程 $y=-\dfrac{1}{5k}x$，故 O,M,N 三点共线.

……………7 分

（2）由（1）可知，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{5}(1+k^2)}{5k^2+1}$ ……………8 分

$|FM|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{5}{2}-2\right|=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{2|k|}$ ……………9 分

$|FN|=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{10k^2}{5k^2+1}-2\right|=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}}{5k^2+1}$ ……………10 分

$\therefore \dfrac{|AB|\cdot|FM|}{|FN|}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\dfrac{k^2+1}{|k|}\geq\sqrt{5}$，

当且仅当 $|k|=1$ 时，等号成立……………12 分

22．解：

（1）$f(x)=\ln(x+1)-ax, f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a$ ……………1 分

①当 $a\leq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a\geq 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立，

$\therefore f(x)=\ln(x+1)-ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，所以 $f(x)>f(0)=0$，不符合题意.

……………2 分

②当$0<a<1$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a\geq 0\Leftrightarrow 0<x\leq \dfrac{1}{a}-1$，

$\therefore f(x)=\ln(x+1)-ax$在$\left(0,\dfrac{1}{a}-1\right)$上递增，在$\left(\dfrac{1}{a}-1,+\infty\right)$上递减，

$\because f\left(\dfrac{1}{a}-1\right)>f(0)=0$，当$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$，满足题意……………4分

③当$a\geq 1$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a<0$在$x\in(0,+\infty)$时恒成立，

$\therefore f(x)=\ln(x+1)-ax$在$(0,+\infty)$上递减，$\therefore f(x)<f(0)=0$，不符合题意.

……………6分

综上所述，a的取值范围是$(0,1)$.

（2）（ⅰ）由（1）知$0<a<1,\therefore a=\dfrac{\ln(x_0+1)}{x_0}$，

要证明$x_0>2\left(\dfrac{1}{a}-1\right)$，只要证明$\ln(x_0+1)>\dfrac{2x_0}{x_0+2}$，

设$g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2},x>0$，

$g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\geq 0$，

$g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}>g(0)=0$，即$x_0>2\left(\dfrac{1}{a}-1\right)$，

（ii）要证明$x_0<\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1$，只要证明$\ln(x_0+1)<\dfrac{1}{a}$，

即证明$\ln(x_0+1)<\dfrac{x_0}{\ln(x_0+1)},\because \ln\left(x_0+1\right)>0$，即证$\ln(x_0+1)<\sqrt{x_0}$ ……………7分

设$h(x)=\ln(x+1)-\sqrt{x},x>0$，

则$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}<0$，

所以当 $x>0$ 时，$h(x)<h(0)=0$，即 $0<x_0<\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1$ ① ……………9 分

另一方面，$\because f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}-1\right)$ 上递增，在 $\left(\frac{1}{a}-1,x_0\right)$ 上递减，

又 $f(0)=f(x_0)=0$, $0<ax_0<x_0$,

$\therefore 0<f(\ln(x_0+1))=f(ax_0)<f\left(\frac{1}{a}-1\right)=a-\ln a-1$ ② ……………12 分

由①②得 $x_0 f(\ln(x_0+1))<\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1\right)(a-\ln a-1)$.