

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 1 月测试

文科数学试卷（一卷）

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。



扫码查成绩

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{y | y = 2x, x \in A\}$, 则 $B \cap C =$

- A. $\{4, 6\}$ B. $\{4, 8\}$ C. $\{6, 8\}$ D. $\{4, 6, 8\}$

2. 已知 F_1 和 F_2 是双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$ 的两个焦点， $|F_1F_2| =$

- A. $\sqrt{7}$ B. 3 C. $2\sqrt{7}$ D. 6

3. 有两条不同的直线 m, n ，以及两个不同的平面 α, β ，下列说法正确的是

- A. 若 $m // \alpha, \alpha // \beta$ ，则 $m // \beta$ B. 若 $\alpha \cap \beta = m, n \subset \alpha, n \perp m$ ，则 $n \perp \beta$

- C. 若 $m \perp \alpha, n // \alpha$ ，则 $m \perp n$ D. 若 $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha, n // \beta$ ，则 $m \perp n$

4. 已知 $b > 0$ ，则“ $a > b + 1$ ”是“ $\sqrt{a} > \sqrt{b} + 1$ ”的

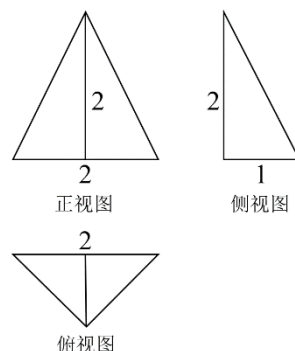
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 1, a_3 \cdot a_5 = 16$ ，则 $\frac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3}$ 的值是

- A. 2 B. 4
C. 8 D. 16

6. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积是

- A. $\frac{15}{4}$ B. $6 + 2\sqrt{6}$
C. 6 D. $4 + 2\sqrt{6}$



(第 6 题图)

7. 将函数 $f(x) = 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x$ 先向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，再将图像上各点的横坐标压缩为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），则所得函数图像的一个对称中心为

- A. $(\frac{\pi}{12}, 0)$ B. $(-\frac{\pi}{12}, 1)$ C. $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ D. $(\frac{\pi}{12}, 1)$

8. 已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c} - \vec{b} + \vec{a}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ，则 $|\vec{c}|$ 的最大值为

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

9. 四面体 $ABCD$, AB, AC, AD 两两垂直, P, Q, R 分别是 AB, AC, AD 上的点, 且 $AP < AQ < AR$, 设二面角 $A-PQ-R, A-QR-P, A-RP-Q$ 的平面角分别为 α, β, γ , 则

- A. $\alpha > \beta > \gamma$ B. $\alpha > \gamma > \beta$ C. $\beta > \gamma > \alpha$ D. $\gamma > \beta > \alpha$

10. 已知 $a, b, c \in [\frac{1}{2}, 1]$, 则 $\frac{a^2 + 2b^2 + c^2}{ab + bc}$ 的取值范围是

- A. $[2, 3]$ B. $[\frac{5}{2}, 3]$ C. $[2, \frac{5}{2}]$ D. $[1, 3]$

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2)$, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, P 为椭圆上一点, $M(2, 1)$,

MF_1 平分角 $\angle PF_1F_2$, 则 $\triangle MPF_1$ 与 $\triangle MPF_2$ 的面积之和为

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3

12. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = a_n^2 + a (a \in \mathbf{R})$, 且 $|a_n| \leq 2$, 则 a 的取值范围是

- A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 0]$ C. $[0, \frac{1}{4}]$ D. $[-2, \frac{1}{4}]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知复数 z 满足 $1 + 2zi = i$, 其中 i 是虚数单位, 则 $|z| =$ _____.

14. 设 $m \in \mathbf{R}$, 过定点 A 的动直线 $x + my = 0$ 与过定点 B 的动直线 $mx - y - 2m + 4 = 0$ 交于点

$P(x, y)$, 则 $|PA| \cdot |PB|$ 的最大值是_____.

15. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 线段 BC 上的点 D 满足 $AD = CD$,

$$\tan B = \frac{12}{5}, c = 14, BD = 13, \text{ 则 } \tan C = \underline{\hspace{2cm}}.$$

16. $f(x) = x^4 - 6x^3 + rx^2 - 6x + 1$ 在 $(0, 3]$ 有且仅有三个零点, 则实数 r 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 甲、乙、丙三人各打靶一次, 若甲打中的概率为 $\frac{1}{3}$, 乙、丙打中的概率均为 $\frac{t}{4} (1 < t < 4)$,

若甲、乙、丙都打中的概率是 $\frac{9}{48}$.

(1) 求 t 的值;

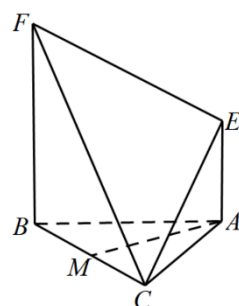
(2) 设 ξ 表示甲、乙两人中中靶的人数, 求 ξ 的数学期望.

18. (12 分) 在如图所示的几何体中, $EA \perp$ 平面 ABC , $FB \perp$ 平面 ABC ,

$BA \perp AC$, 且 $2AB = 2AC = 2AE = BF$, M 是 BC 的中点.

(1) 求证: $AM \perp FC$;

(2) 求 CE 与平面 FBC 所成角.



(第 18 题图)

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 且 $a_n + \frac{1}{2} = \sqrt{2S_n + \frac{1}{4}}, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} (n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若对任意正整数 n , 都有

$$T_n \geq 2n + m, \text{ 求实数 } m \text{ 的取值范围.}$$

20. (12 分) 已知抛物线 $y^2 = 2px$, 焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 抛物线上动点 A 满足到抛物线内定点 $P(1, 1)$ 的

距离与到焦点 F 的距离和 $|PA| + |AF|$ 的最小值为 2.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 以 PA 为边作平行四边形 $PABC$, 使得 B, C 均在抛物线上, 求平行四边形 $PABC$ 的面积

S 的最小值.

21. (12 分) 设函数 $f(x) = ax^2 - x \ln x$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若关于 x 的方程 $f'(x) = -1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的根 x_1, x_2 .

(i) 求 a 的取值范围;

(ii) 证明: $x_1 x_2 > e^2$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. (10 分) [选修 4—4: 极坐标与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 过点 $P(-1, -2)$, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立

极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho - \rho \cos^2 \theta - 8 \cos \theta = 0$.

(1) 求 C 的直角坐标方程;

(2) 若 l 与 C 交于 A, B 两点, 求 $\frac{|AB|^2}{|PA|^2 \cdot |PB|^2}$ 的最大值.

23. (10 分) [选修 4—5: 不等式选讲]

已知不等式 $|x - 5| + |x - 7| \leq 4$ 的解集为 $[a, b]$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若 $x > 0, y > 0, bx + 3y = a$, 求 $\frac{1}{2x} + \frac{1}{y}$ 的最小值.