中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 1 月测试

文科数学试卷（一卷）参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	D	C	B	A	C	D	B	B	C	C	D

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

14．10

15．$\dfrac{4}{7}$

16．$\left(10,\dfrac{98}{9}\right)$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．解：

（1）设事件 A 表示甲中靶，B 表示乙中靶，C 表示丙中靶，由已知条件可知：

$P(A)=\dfrac{1}{3},P(B)=P(C)=\dfrac{t}{4}$，由于 A,B,C 是独立事件，

则 $P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{t}{4}\right)^2=\dfrac{9}{48}$……..3 分

可得：$t=3$……..4 分

（2）ξ 表示甲、乙两人中中靶的人数，ξ 的可能取值为 $0,1,2$，

$P(\xi=0)=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{6}$……..6 分

$P(\xi=1)=\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{12}$……..8 分

$P(\xi=2)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$........10 分

即 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

$E\xi=1\times\frac{7}{12}+2\times\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$........12 分

18．解：

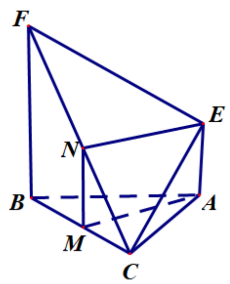
（1）$\because FB\perp$ 平面 ABC， $AM\subset$ 面ABC，

$\therefore FB\perp AM$ ....2 分

$\because AB=AC, M$ 是 BC 的中点， $\therefore AM\perp BC, \because FB\cap BC=B$，

$\therefore AM\perp$ 面 FBC ....4 分

$\because FC\subset$ 面 $FBC, \therefore AM\perp FC$ ....5 分



（2）取 FC 中点 N，连接 MN, EN，

$\because M$ 是 BC 的中点，N 是 FC 中点，

$\therefore MN$ 为 ΔFBC 的中位线，

$\therefore \mathrm{MN}\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}FB, \because EA\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}FB, \therefore AMNE$ 为平行四边形，

$\therefore EN//AM$ ....7 分

由（1）已知 $AM\perp$ 面 FBC， $\therefore EN\perp$ 面 FBC，

$\therefore NC$ 是斜线 CE 在平面 FBC 内的射影，则 CE 与平面 FBC 所成的角为 $\angle ECN$

........9 分

设 $2AB=2AC=2AE=BF=2$，由 $\angle FBA=90^\circ$，

可得 $EF=\sqrt{2}, EC=\sqrt{2}, FC=\sqrt{2^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{6}$，

ΔEFC 为等腰三角形，$\therefore \cos\angle ECN=\frac{CN}{EC}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

可得：$\angle ECN=30^\circ$，即：CE 与平面 FBC 所成角为 30° ....12 分

19．解：

（1）$a_n+\frac{1}{2}=\sqrt{2S_n+\frac{1}{4}}$ 可化简为 $2S_n=a_n^2+a_n$ ①……2 分

当 $n=1$ 时，解得 $a_1=1$ 或 0.因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，所以 $a_1=1$……3 分

当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$ ②，

①-②，则 $2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，

化简可得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，

由于 $a_n>0$，$a_n+a_{n-1}>0$，则 $a_n-a_{n-1}=1(n\geq 2)$，

即数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，$a_n=n$……6 分

（1）$b_n=\frac{2n+1}{2n-1}+\frac{2n-1}{2n+1}=2+\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}=2+2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

从而 $T_n=2n+2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=2n+2-\frac{2}{2n+1}$……9 分

由于 $2n+2-\frac{2}{2n+1}\geq 2n+m$ 对任意正整数 n 成立，则 $2-\frac{2}{2n+1}\geq m$，

即 $m\leq\left(2-\frac{2}{2n+1}\right)_{\min}$，因为 $2-\frac{2}{2n+1}$ 随着 n 增大而增大，

所以当 $n=1$ 时，$2-\frac{2}{2n+1}=\frac{4}{3}$，所以实数 m 的取值范围是 $m\leq\frac{4}{3}$……12 分

20．解：

（1）抛物线 $y^2=2px$ 的准线 $l:x=-\frac{p}{2}$，过点 A 做 $AA'\perp l$，垂足为 A'，

由抛物线的定义可知，$|PA|+|AF|=|PA|+|AA'|$，过点 P 做 $PP'\perp l$，垂足为 P'，

所以 $|PA|+|AF|=|PA|+|AA'|\geq|PP'|$……2 分，

由题意：$|PP'|=1+\frac{p}{2}$……3 分，

所以 $p=2$, 抛物线的方程为 $y^2=4x$……..4 分

（2）设 $l_{AC}:x=ty+a$，与抛物线联立得：$y^2-4ty-4a=0$，

设 $A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，由韦达定理：$\begin{cases} y_1+y_2=4t \\ y_1y_2=-4a \end{cases}, \Delta=16t^2+16a>0$……..6 分

设 AC,PB 的交点为 G，则 $G(2t^2+a,2t)$，

由于 G 为 PB 的中点，则 $B(4t^2+2a-1,4t-1)$ 因为 B 在抛物线上，

代入抛物线可得：$(4t-1)^2=4(4t^2+2a-1)$，即 $8a+8t-5=0(*)$，

此时 $\Delta=16t^2+16a=16t^2-16t+10>0$ 恒成立……..8 分

对 $l_{AC}:x=ty+a$，令 $y=1$，则 $x=t+a$，

$S_{\Delta APC}=\frac{1}{2}|t+a-1|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}|t+a-1|\sqrt{16t^2+16a}$，将 $(*)$ 代入简化得：

$S_{\Delta APC}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}\sqrt{16t^2-16t+10}=\frac{3}{4}\sqrt{t^2-t+\frac{5}{8}}$ …….10 分，

平行四边形 $PABC$ 的面积 $S=2S_{\Delta APC}=\frac{3}{2}\sqrt{t^2-t+\frac{5}{8}}$，

所以当 $t=\frac{1}{2}, S_{\min}=\frac{3}{8}\sqrt{6}$，此时 $a=\frac{1}{8}$……..12 分

21．解：

（1）$a=1$ 时，$f(x)=x^2-x\ln x, f'(x)=2x-\ln x-1$，则 $f'(1)=1$……..2 分，

又 $f(1)=1$，所以切点坐标为 $(1,1)$，

则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x$……..3 分

（2）由 $f'(x)=-1$，得 $2ax-\ln x=0$，即 x_1,x_2 是方程 $2ax-\ln x=0$ 的两根.

（i）设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,e)$ 上为增函数，在区间 $(e,+\infty)$ 为减函数，……..5 分

当$0<x\le 1$时，$g(x)\le 0$，

当$1<x\le e$时，$0<g(x)\le\frac{1}{e}$，

当$x\to+\infty$时，$g(x)\to 0$且$g(x)>0$，则当$x\ge e$时，$0<g(x)\le\frac{1}{e}$……..6 分，

则当$0<2a<\frac{1}{e}$时，关于x的方程$2a=\frac{\ln x}{x}$在区间$(0,+\infty)$上有不同的两根，

故a的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2e}\right)$……..8 分，

（ii）不妨设$x_1<x_2$，由（i）知$1<x_1<e<x_2$，且$2ax_1=\ln x_1, 2ax_2=\ln x_2$，

则$2a(x_1+x_2)=\ln x_1+\ln x_2=\ln(x_1x_2)$, 即$2a=\frac{\ln(x_1x_2)}{x_1+x_2}$，

$2a(x_2-x_1)=\ln x_2-\ln x_1=\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$，即$2a=\frac{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{x_2-x_1}$，则有$\frac{\ln(x_1x_2)}{x_1+x_2}=\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$，

即$\ln(x_1x_2)=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}$，要证$x_1x_2>e^2$，即证$\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}>2$，……..10 分，

又$\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}>0$, 即证$\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}$, 令$\frac{x_2}{x_1}=t>1$, 即证$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}=2-\frac{4}{t+1}$，

设$h(t)=\ln t+\frac{4}{t+1}-2\ (t>1)$，则$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

即$h(t)$在区间$(1,+\infty)$上是增函数，则$h(t)>h(1)=0$，

即$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$成立，故有$x_1x_2>e^2$……..12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．解：

（1）曲线C的极坐标方程为$\rho-\rho\cos^2\theta-8\cos\theta=0$，两边同时乘以$\rho$，

得 $\rho^2-\rho^2\cos^2\theta-8\rho\cos\theta=0$，把互化公式代入可得：$x^2+y^2-x^2-8x=0$，

即 $y^2=8x$，所以曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=8x$……..4 分

（2）设直线 l 的倾斜角为 α $(\alpha\neq 0)$，

可得参数方程为：$\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha\\ y=-2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），代入抛物线方程可得：

$\sin^2\alpha\cdot t^2-(4\sin\alpha+8\cos\alpha)t+12=0, \because \Delta>0 \therefore 2\sin 2a+3\cos 2a+1>0$，

则 $t_1+t_2=\dfrac{4\sin\alpha+8\cos\alpha}{\sin^2\alpha}, t_1t_2=\dfrac{12}{\sin^2\alpha}>0$，……..6 分

$$|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\left(\frac{4\sin\alpha+8\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)^2-4\cdot\frac{12}{\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{4\sqrt{4\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$$……..8 分

$$\therefore \frac{|AB|^2}{|PA|^2\cdot|PB|^2}=\frac{|t_1-t_2|^2}{|t_1t_2|^2}$$

$$=\frac{16(4\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\sin^2\alpha)}{144}=\frac{4\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\sin^2\alpha}{9}$$

$=\dfrac{3\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha+1}{9}\leq\dfrac{\sqrt{13}+1}{9}$，此时符合直线 l 与抛物线有两个交点，

$\therefore \dfrac{|AB|^2}{|PA|^2\cdot|PB|^2}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{13}+1}{9}$……..10 分

23．解：

（1）当 $x\geq 7$ 时，$2x-12\leq 4$，可得：$x\leq 8$，$\therefore 7\leq x\leq 8$……..1 分
当 $5<x<7$ 时，$x-5+7-x=2\leq 4$ 恒成立，$\therefore 5<x<7$……..2 分
当 $x\leq 5$ 时，$12-2x\leq 4$，可得：$x\geq 4$，$\therefore 4\leq x\leq 5$……..3 分

综上所述，不等式 $|x-5|+|x-7|\leq 4$ 的解集为 $[4,8]$，即 $a=4, b=8$……..4 分

（2）$8x+3y=4$，

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}\right)(8x+3y)=\frac{1}{4}\left(7+\frac{3y}{2x}+\frac{8x}{y}\right)$$

$\geq \frac{1}{4}\left(7+2\sqrt{\frac{3y}{2x}\cdot\frac{8x}{y}}\right)=\frac{7}{4}+\sqrt{3}$ ……..8 分

当且仅当$\begin{cases}\frac{3y}{2x}=\frac{8x}{y}\\8x+3y=4\end{cases}$，即 $x=2-\sqrt{3}$， $y=\frac{8\sqrt{3}}{3}-4$ 时取等号，

故所求最小值为$\frac{7}{4}+\sqrt{3}$ ……..10 分