随机变量及其分布

一、单选题

1．设$0<a<1$，则随机变量X的分布列是：

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当a在$(0,1)$内增大时（　）

A．$D(X)$增大　　B．$D(X)$减小

C．$D(X)$先增大后减小　　D．$D(X)$先减小后增大

2．某中学在高三上学期期末考试中，理科学生的数学成绩$X\sim N(105,100)$，若已知$P(90<X\leq 105)=0.36$，则从该校理科生中任选一名学生，他的数学成绩大于 120 分的概率为(　　)

A．0.86　　B．0.64　　C．0.36　　D．0.14

3．某物理量的测量结果服从正态分布$N(10,\sigma^2)$，下列结论中不正确的是（　　）

A．σ越小，该物理量在一次测量中在$(9.9,10.1)$的概率越大

B．σ越小，该物理量在一次测量中大于 10 的概率为 0.5

C．σ越小，该物理量在一次测量中小于 9.99 与大于 10.01 的概率相等

D．σ越小，该物理量在一次测量中落在$(9.9,10.2)$与落在$(10,10.3)$的概率相等

4．已知随机变量ξ服从正态分布$N(2,\sigma^2)$，且$P(\xi<4)=0.8$，则$P(0<\xi<2)$（　　）

A．0.6　　B．0.4　　C．0.3　　D．0.2

5．袋子中装有大小、形状完全相同的2个白球和2个红球，现从中不放回地摸取两个球，已知第二次摸到的红球，则第一次摸到红球的概率为（）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{5}$

6．已知随机变量ξ满足$P(\xi=0)=1-p$，$P(\xi=1)=p$，其中$0<p<1$.令随机变量$\eta=|\xi-E(\xi)|$，则（　　）

A．$E(\eta)>E(\xi)$　　B．$E(\eta)<E(\xi)$

C．$D(\eta)>D(\xi)$　　D．$D(\eta)<D(\xi)$

7．有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则（　　）

A．甲与丙相互独立　　　　B．甲与丁相互独立

C．乙与丙相互独立　　　　D．丙与丁相互独立

8．机械研究所对新研发的某批次机械元件进行寿命追踪调查，随机抽查的 200 个机械元件情况如下：

使用时间/天	10～20	21～30	31～40	41～50	51～60
个数	10	40	80	50	20

若以频率估计概率，现从该批次机械元件中随机抽取 3 个，则至少有 2 个元件的使用寿命在 30 天以上的概率为（　　）

A．$\frac{13}{16}$　　B．$\frac{27}{64}$　　C．$\frac{25}{32}$　　D．$\frac{27}{32}$

二、多选题

9．已知在某市的一次学情检测中，学生的数学成绩 X 服从正态分布 $N(100,100)$，其中 90 分为及格线，120 分为优秀线．下列说法正确的是（　　）．

附：随机变量 ξ 服从正态分布 $N\left(u,\sigma^2\right)$，则 $P\left(\mu-\sigma<\xi<u+\sigma\right)=0.6826$，

$P\left(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma\right)=0.9544$，$P\left(u-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma\right)=0.9974$

A．该市学生数学成绩的期望为 100

B．该市学生数学成绩的标准差为 100

C．该市学生数学成绩及格率超过 0.8

D．该市学生数学成绩不及格的人数和优秀的人数大致相等

10．小张上班从家到公司开车有两条线路，所需时间（分钟）随交通堵塞状况有所变化，其概率分布如下表所示：

所需时间（分钟）	30	40	50	60
线路一	0.5	0.2	0.2	0.1
线路二	0.3	0.5	0.1	0.1

则下列说法正确的是（　　）

A．任选一条线路，“所需时间小于 50 分钟”与“所需时间为 60 分钟”是对立事件

B．从所需的平均时间看，线路一比线路二更节省时间

C．如果要求在 45 分钟以内从家赶到公司，小张应该走线路一

D．若小张上、下班走不同线路，则所需时间之和大于 100 分钟的概率为 0.04

11．下列说法正确的是（　　）

A．设随机变量 X 等可能取 $1,2,3$，…，n，如果 $P(X<4)=0.3$，则 $n=10$

B．设随机变量 X 服从二项分布 $B\left(6,\frac{1}{2}\right)$，则 $P(X=3)=\frac{5}{16}$

C．设离散型随机变量 η 服从两点分布，若 $P(\eta=1)=2P(\eta=0)$，则 $P(\eta=0)=\frac{1}{3}$

D．已知随机变量 X 服从正态分布 $N\left(2,\sigma^2\right)$ 且 $P(X<4)=0.9$，则 $P(0<X<2)=0.3$

12．甲、乙两人进行围棋比赛，共比赛 $2n\left(n\in N^*\right)$ 局，且每局甲获胜的概率和乙获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$.如果某人获胜的局数多于另一人，则此人赢得比赛.记甲赢得比赛的概率为 $P(n)$，则（　　）

A．$P(2)=\frac{1}{8}$　　　　B．$P(3)=\frac{11}{32}$

C．$P(n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}\right)$　　　　D．$P(n)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$

三、填空题

13．甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）．根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4∶1 获胜的概率是____________.

14．春天即将来临，某学校开展以“拥抱春天，播种绿色”为主题的植物种植实践体验活动．已知某种盆栽植物每株成活的概率为 p，各株是否成活相互独立．该学校的某班随机领养了此种盆栽植物 10 株，设 X 为其中成活的株数，若 X 的方差 $DX=2.1$，$P(X=3)<P(X=7)$，则 $p=$________.

15．伟大出自平凡，英雄来自人民．在疫情防控一线，北京某大学学生会自发从学生会 6 名男生和 8 名女生骨干成员中选出 2 人作为队长率领他们加入武汉社区服务队，用 A 表示事件“抽到的 2 名队长性别相同”，B 表示事件“抽到的 2 名队长都是男生”，则 $P\left(B|A\right)=$________

16．甲乙两名选手进行一场羽毛球比赛，采用三局二胜制，先胜两局者赢得比赛，比赛随即结束，已知任一局甲胜的概率为 p，若甲赢得比赛的概率为 q，则 $q-p$ 取得最大值时 $p=$______

17．某射击运动员每次击中目标的概率为 $\frac{4}{5}$，现连续射击两次.

（1）已知第一次击中，则第二次击中的概率是__________ ；

（2）在仅击中一次的条件下，第二次击中的概率是__________ .

18．盒子里有 4 个球，其中 1 个红球，1 个绿球，2 个黄球，从盒中随机取球，每次取 1 个，不放回，直到取出红球为止. 设此过程中取到黄球的个数为ξ，则$P(\xi=0)=$_______；$E(\xi)=$______.

19．袋中有 4 个红球 m 个黄球，n 个绿球.现从中任取两个球，记取出的红球数为ξ，若取出的两个球都是红球的概率为$\frac{1}{6}$，一红一黄的概率为$\frac{1}{3}$，则$m-n=$____________，$E\left(\xi\right)=$____________.

20．甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语，若一方猜对且另一方猜错，则猜对的一方获胜，否则本次平局，已知每次活动中，甲、乙猜对的概率分别为$\frac{5}{6}$和$\frac{1}{5}$，且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响，各次活动也互不影响，则一次活动中，甲获胜的概率为____________，3 次活动中，甲至少获胜 2 次的概率为______________.

四、解答题

21．某学校组织“一带一路”知识竞赛，有 A，B 两类问题，每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分，已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（1）若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

22．甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：累计负两场者被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束.经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空.设每场比赛双方获胜的概率都为$\frac{1}{2}$，

（1）求甲连胜四场的概率；

（2）求需要进行第五场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率.

23．某校为举办甲、乙两项不同活动，分别设计了相应的活动方案：方案一、方案二．为了解该校学生对活动方案是否支持，对学生进行简单随机抽样，获得数据如下表：

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	200 人	400 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立.

（Ⅰ）分别估计该校男生支持方案一的概率、该校女生支持方案一的概率；

（Ⅱ）从该校全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率；

（Ⅲ）将该校学生支持方案的概率估计值记为 p_0，假设该校一年级有 500 名男生和 300 名女生，除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1，试比较 p_0 与 p_1 的大小.（结论不要求证明）

24．某大型公司为了切实保障员工的健康安全，贯彻好卫生防疫工作的相关要求，决定在全公司范围内举行一次乙肝普查.为此需要抽验 669 人的血样进行化验，由于人数较多，检疫部门制定了下列两种可供选择的方案.

方案一：将每个人的血分别化验，这时需要验 669 次.

方案二：按k个人一组进行随机分组，把从每组k个人抽来的血混合在一起进行检验，如果每个人的血均为阴性，则验出的结果呈阴性，这k个人的血就只需检验一次（这时认为每个人的血化验$\frac{1}{k}$次）；否则，若呈阳性，则需对这k个人的血样再分别进行一次化验，这时该组k个人的血总共需要化验$k+1$次.

假设此次普查中每个人的血样化验呈阳性的概率为p，且这些人之间的试验反应相互独立.

（1）设方案二中，某组k个人中每个人的血化验次数为X，求X的分布列.

（2）设$p=0.1$，试比较方案二中，k分别取 2，3，4 时，各需化验的平均总次数；并指出在这三种分组情况下，相比方案一，化验次数最多可以平均减少多少次？（最后结果四舍五入保留整数）

25．近些年随着我国国民消费水平的升级，汽车产品已经逐渐进入千家万户，但是我国的城市发展水平并不能与汽车保有量增速形成平衡，城市交通问题越发突出，因此各大城市相继出现了购车限号上牌的政策.某城市采用摇号买车的限号上牌方式，申请人提供申请，经审查合格后，确认申请编码为有效编码，这时候就可以凭借申请编码参加每月一次的摇号.假设该城市有 20 万人参加摇号，每个月有 2 万个名额，每个月摇上的人退出摇号，没有摇上的人继续下个月摇号.

（1）平均每个人摇上号需要多长时间?

（2）如果每个月都有 2 万人补充进摇号队伍，以每个人进入摇号的月份算第一个月，他摇到号的月份设为随机变量 X .

①证明：$\{P(X=n)\}(n\in N^{*},1\le n\le 35)$ 为等比数列；

②假设该项政策连续实施 36 个月，小王是第一个月就参加摇号的人，记小王参.加摇号的次数为 Y，试求 Y 的数学期望（精确到 0.01）.

参考数据：$0.9^{34}\approx 0.028$，$0.9^{35}\approx 0.025$.

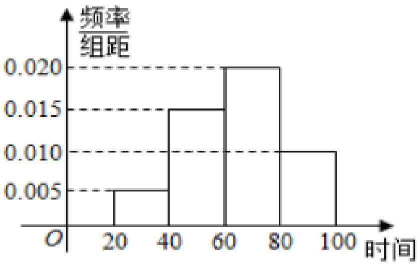
26．为加快新冠肺炎检测效率，某检测机构采取“k 合 1 检测法”，即将 k 个人的拭子样本合并检测，若为阴性，则可以确定所有样本都是阴性的；若为阳性，则还需要对本组的每个人再做检测．现有 100 人，已知其中 2 人感染病毒．

（1）①若采用“10 合 1 检测法”，且两名患者在同一组，求总检测次数；

②已知 10 人分成一组，分 10 组，两名感染患者在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$，定义随机变量 X 为总检测次数，求检测次数 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（2）若采用“5 合 1 检测法”，检测次数 Y 的期望为 $E(Y)$，试比较 $E(X)$和 $E(Y)$的大小(直接写出结果).

27．2021 年五一节期间，我国高速公路继续执行“节假日高速公路免费政策”.某路桥公司为掌握五一节期间车辆出行的高峰情况，在某高速公路收费站点记录了 3 日上午 9:20~10:40 这一时间段内通过的车辆数，统计发现这一时间段内共有 600 辆车通过该收费站点，它们通过该收费站点的时刻的频率分布直方图如下图所示，其中时间段 9:20~9:40 记作$[20,40)$，9:40~10:00 记作$[40,60)$，10:00~10:20 记作$[60,80)$，10:20~10:40 记作$[80,100)$，例如：9:46，记作时刻 46.



（1）估计这 600 辆车在 9:20~10:40 时间内通过该收费站点的时刻的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值代替）

（2）为了对数据进行分析，现采用分层抽样的方法从这 600 辆车中抽取 10 辆，再从这 10 辆车中随机抽取 4 辆，设抽到的 4 辆车中，在 9:20~10:00 之间通过的车辆数为 X，求 X 的分布列；

（3）根据大数据分析，车辆在每天通过该收费站点的时刻 T 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 μ 可用 3 日数据中的 600 辆车在 9:20~10:40 之间通过该收费站点的时刻的平均值近似代替，σ^2 用样本的方差近似代替（同一组中的数据用该组区间的中点值代替）.假如 4 日上午 9:20~10:40 这一时间段内共有 1000 辆车通过该收费站点，估计在 9:46~10:40 之间通过的车辆数（结果保留到整数）

附：若随机变量 T 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(\mu-\sigma<T\le\mu+\sigma)=0.6827$，

$P(\mu-2\sigma<T\le\mu+2\sigma)=0.9545$，$P(\mu-3\sigma<T\le\mu+3\sigma)=0.9973$.

28．2021年2月1日教育部办公厅《关于加强中小学生手机管理工作的通知》中明确“中小学生原则上不得将个人手机带入校园”，为此某学校开展了一项“你能否有效管控手机”调查，并从调查表中随机抽取200名学生（其中男、女生各占一半）的样本数据，其2×2列联表如下：

性别	能管控	不能管控	总计
男	30		
女			
总计	90		200

（1）完成上述2×2列联表，并判断是否有99.9%的把握认为能否管控手机与性别有关？

（2）若学生确因需要带手机进入校园需向学校有关部门报告，该校为做好这部分学生的手机管理工作，学校团委从能管控的学生中按样本中的比例抽取了6名学生组成一个团队．

（ⅰ）从该团队中选取2名同学作个人经验介绍，求选取的2人中恰有一名女生的概率．

（ⅱ）从这6人中随机抽取4人，设抽到的女生的人数为X，求X的分布列与数学期望．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$．

$P(K^2\geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

29．一种微生物群体可以经过自身繁殖不断生存下来，设一个这种微生物为第 0 代，经过一次繁殖后为第 1 代，再经过一次繁殖后为第 2 代……，该微生物每代繁殖的个数是相互独立的且有相同的分布列，设 X 表示 1 个微生物个体繁殖下一代的个数，$P(X=i)=p_i(i=0,1,2,3)$．

（1）已知 $p_0=0.4, p_1=0.3, p_2=0.2, p_3=0.1$，求 $E(X)$；

（2）设 p 表示该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率，p 是关于 x 的方程：$p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$ 的一个最小正实根，求证：当 $E(X)\le 1$ 时，$p=1$，当 $E(X)>1$ 时，$p<1$；

（3）根据你的理解说明（2）问结论的实际含义．

30．在创建“全国文明城市”过程中，我市“创城办”为了调查市民对创城工作的了解情况，进行了一次创城知识问卷调查（一位市民只能参加一次）通过随机抽样，得到参加问卷调查的 100 人的得分统计结果如表所示：

组别	[30，40)	[40，50)	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
频数	2	13	21	25	24	11	4

（1）由频数分布表可以大致认为，此次问卷调查的得分 $Z\sim N\left(\mu,198\right)$，$\mu$ 近似为这 100 人得分的平均值（同一组中的数据用该组区间的左端点值作代表），

①求 μ 的值；

②利用该正态分布，求 $P\left(74.5<Z\le 88.5\right)$；

（2）在（1）的条件下，“创城办”为此次参加问卷调查的市民制定如下奖励方案：

①得分不低于 μ 的可以获赠 2 次随机话费，得分低于 μ 的可以获赠 1 次随机话费；

②每次获赠的随机话费和对应的概率为：

赠送话费的金额（单位：元）	20	50
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

现有市民甲参加此次问卷调查，记 X（单位：元）为该市民参加问卷调查获赠的话费，求 X 的分布列与数学期望．

参考数据与公式：$\sqrt{198}\approx 14$．若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6826$，

$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9974$．

参考答案

1．D　2．D　3．D　4．C　5．B　6．D　7．B　8．D

9．AC　10．BD　11．ABC　12．BC

13．0.18　14．0.7　15．$\frac{15}{43}$　16．$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$　17．$\frac{4}{5}$　$\frac{1}{2}$　18．$\frac{1}{3}$　1　19．1　$\frac{8}{9}$　20．$\frac{2}{3}$　$\frac{20}{27}$

21．【解析】（1）由题可知，X 的所有可能取值为0，20，100．

$P(X=0)=1-0.8=0.2$；

$P(X=20)=0.8(1-0.6)=0.32$；

$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$．

所以 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

（2）由（1）知，$E(X)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$．

若小明先回答 B 问题，记 Y 为小明的累计得分，则 Y 的所有可能取值为0，80，100．

$P(Y=0)=1-0.6=0.4$；

$P(Y=80)=0.6(1-0.8)=0.12$；

$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$．

所以 $E(Y)=0\times0.4+80\times0.12+100\times0.48=57.6$．

因为 $54.4<57.6$，所以小明应选择先回答 B 类问题．

22．【解析】（1）记事件 M：甲连胜四场，则 $P(M)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$；

（2）记事件 A 为甲输，事件 B 为乙输，事件 C 为丙输，

则四局内结束比赛的概率为

$$P'=P(ABAB)+P(ACAC)+P(BCBC)+P(BABA)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4},$$

所以，需要进行第五场比赛的概率为 $P=1-P'=\frac{3}{4}$；

（3）记事件 A 为甲输，事件 B 为乙输，事件 C 为丙输，

记事件M:甲赢，记事件N:丙赢，

则甲赢的基本事件包括：$BCBC$、$ABCBC$、$ACBCB$、

$BABCC$、$BACBC$、$BCACB$、$BCABC$、$BCBAC$，

所以，甲赢的概率为$P(M)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+7\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{9}{32}$.

由对称性可知，乙赢的概率和甲赢的概率相等，

所以丙赢的概率为$P(N)=1-2\times\frac{9}{32}=\frac{7}{16}$.

23.【解析】(Ⅰ)该校男生支持方案一的概率为$\frac{200}{200+400}=\frac{1}{3}$，

该校女生支持方案一的概率为$\frac{300}{300+100}=\frac{3}{4}$；

(Ⅱ)3 人中恰有 2 人支持方案一分两种情况，(1)仅有两个男生支持方案一，(2)仅有一个男生支持方案一，一个女生支持方案一，

所以 3 人中恰有 2 人支持方案一概率为：$(\frac{1}{3})^2(1-\frac{3}{4})+C_2^1(\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})\frac{3}{4}=\frac{13}{36}$；

(Ⅲ) $p_1<p_0$

24.【解析】(1) 设每个人的血呈阴性反应的概率为q，则$q=1-p$.

所以k个人的血混合后呈阴性反应的概率为q^k，呈阳性反应的概率为$1-q^k$.

依题意可知$X=\frac{1}{k}$，$1+\frac{1}{k}$，

所以 X 的分布列为：

X	$\frac{1}{k}$	$1+\frac{1}{k}$
P	q^k	$1-q^k$

(2) 方案二中，结合(1)知每个人的平均化验次数为

$E(X)=\frac{1}{k}\cdot q^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-q^k)=\frac{1}{k}-q^k+1$，

所以当$k=2$时，$E(X)=\frac{1}{2}-0.9^2+1=0.69$，

此时 669 人需要化验的总次数为 462 次；

当$k=3$时，$E(X)=\frac{1}{3}-0.9^3+1\approx0.6043$，

此时 669 人需要化验的总次数为 404 次；

当 $k=4$ 时，$E\left(X\right)=\dfrac{1}{4}-0.9^{4}+1=0.5939$，

此时 669 人需要化验的总次数为 397 次.

即 $k=2$ 时化验次数最多，$k=3$ 时次数居中，$k=4$ 时化验次数最少，

而采用方案一则需化验 669 次.

故在这三种分组情况下，

相比方案一，当 $k=4$ 时化验次数最多可以平均减少 $669-397=272$（次）

25.【解析】(1) 由题意，设每个人摇上号的时间为 ξ 个月，则 $\xi=1,2,3,\cdots,10$，

可得 $P(\xi=1)=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}$，$P(\xi=2)=\left(1-\dfrac{1}{10}\right)\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{10}$，

$P(\xi=3)=\left(1-\dfrac{1}{10}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{10}$，……，

$P(\xi=10)=\left(1-\dfrac{1}{10}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{10}$，

所以 $E(\xi)=\dfrac{1}{10}\times(1+2+3+\ldots+10)=\dfrac{11}{2}=5.5$，

即平均每个人摇上号需要的时间为 5.5 个月.

(2)(ⅰ) 每个月的摇号中恰有 $\dfrac{1}{10}$ 的概率摇上，

则有 $P(X=n)\neq 0$，且 $\dfrac{P(X=n+1)}{P(X=n)}=\dfrac{\dfrac{1}{10}\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n}}{\dfrac{1}{10}\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}}=\dfrac{9}{10}$，

故 $\{P(X=n)\}\left(n\in\mathbf{N}^{*},1\leqslant n\leqslant 35\right)$ 为等比数列.

(ⅱ) 由(ⅰ)可知，当 $n\leqslant 35$ 时，$P(X=n)=P(Y=n)$，$P(Y=36)=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{35}$.

故 Y 的数学期望为：$E(Y)=\dfrac{1}{10}\times1+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{10}\times2+\cdots+\left(\dfrac{9}{10}\right)^{34}\times\dfrac{1}{10}\times35+\left(\dfrac{9}{10}\right)^{35}\times36$.

设 $S=1+\dfrac{9}{10}\times2+\cdots+\left(\dfrac{9}{10}\right)^{34}\times35$.

则 $\dfrac{9}{10}S=\dfrac{9}{10}\times1+\left(\dfrac{9}{10}\right)^{2}\times2+\cdots+\left(\dfrac{9}{10}\right)^{35}\times35$，

两式作差得 $\dfrac{1}{10}S=1+[\dfrac{9}{10}+(\dfrac{9}{10})^{2}+(\dfrac{9}{10})^{2}+(\dfrac{9}{10})^{34}]-(\dfrac{9}{10})^{35}\times35$

$$=1+\frac{\frac{9}{10}[1-(\frac{9}{10})^{34}]}{1-\frac{9}{10}}-(\frac{9}{10})^{35}\times 35=1+9[1-(\frac{9}{10})^{34}]-(\frac{9}{10})^{35}\times 35=10-\frac{81}{2}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{34}$$

所以 $E(Y)=10-\frac{81}{2}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{34}+\left(\frac{9}{10}\right)^{35}\times 36=10-8.1\times 0.9^{34}\approx 10-0.2268=9.7732\approx 9.77$.

26.【解析】(1) ①对每组进行检测，需要 10 次；再对结果为阳性的组每个人进行检测，需要 10 次；

所以总检测次数为 20 次；

②由题意，X 可以取 20，30，

$P(X=20)=\frac{1}{11}$，$P(X=30)=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$，

则 X 的分布列:

X	20	30
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

所以 $E(X)=20\times\frac{1}{11}+30\times\frac{10}{11}=\frac{320}{11}$；

(2) 由题意，Y 可以取 25，30，

两名感染者在同一组的概率为$P_1=\frac{20C_2^2C_{98}^3}{C_{100}^5}=\frac{4}{99}$，不在同一组的概率为 $P_1=\frac{95}{99}$，

则$E(Y)=25\times\frac{4}{99}+30\times\frac{95}{99}=\frac{2950}{99}>E(X)$.

27.【解析】(1) 这 600 辆车在 9:20~10:40 时间段内通过该收费点的时刻的平均值为:

$(30\times 0.005+50\times 0.015+70\times 0.020+90\times 0.010)\times 20=64$，即 10:04；

(2) 由频率分布直方图和分层抽样的方法可知，抽取的 10 辆车中，在 10:00 前通过的车辆数就是位于时间分组$[20,60]$这一区间内的车辆数，即 $(0.005+0.015)\times 20\times 10=4$，所以 X 的可能取值为 0，1，2，3，4.

所以$P(X=0)=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{14}$，$P(X=1)=\frac{C_6^3C_4^1}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$，$P(X=2)=\frac{C_6^2C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7}$，$P(X=3)=\frac{C_6^1C_4^3}{C_{10}^4}=\frac{4}{35}$，$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}$.

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

（3）由（1）得 $\mu=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{8}{21}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{4}{35}+4\times\frac{1}{210}=64$，

$\sigma^2=(30-64)^2\times0.1+(50-64)^2\times0.3+(70-64)^2\times0.4+(90-64)^2\times0.2=324$.

所以 $\sigma=18$，估计在 9:46~10:40 之间通过的车辆数也就是在 $[46,100)$ 通过的车辆数，由

$T\sim N\left(64,18^2\right)$，得

$$P(64-18\le T\le 64+2\times18)=\frac{P(\mu-\sigma<T\le\mu+\sigma)}{2}+\frac{P(\mu-2\sigma<T\le\mu+2\sigma)}{2}=0.8186,$$

所以估计在 9:46~10:40 之间通过的车辆数为 $1000\times0.8186\approx819$.

28.【解析】(1) 由题意可得列联表如下：

性别	能管控	不能管控	总计
男	30	70	100
女	60	40	100
总计	90	110	200

$\therefore K^2=\frac{200\times\left(30\times40-60\times70\right)^2}{100\times100\times90\times110}\approx18.182>10.828$，

$\therefore$ 有 99.9% 的把握认为能否管控手机与性别有关；

（2）（ⅰ）由（1）知：能管控的男女生比例为 $1:2$，

$\therefore$ 抽取的 6 名学生中，男生有 2 人，女生有 4 人；

$\therefore$ 从 6 名学生中选取 2 名同学，恰有一名女生的概率 $P=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$；

（ⅱ）由题意知：X 所有可能的取值为 2，3，4，

$\therefore P\left(X=2\right)=\frac{C_4^2}{C_6^4}=\frac{2}{5}$；$P\left(X=3\right)=\frac{C_2^1C_4^3}{C_6^4}=\frac{8}{15}$；$P\left(X=4\right)=\frac{C_4^4}{C_6^4}=\frac{1}{15}$；

$\therefore X$ 的分布列为：

X	2	3	4
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$\therefore$ 数学期望 $E\left(X\right)=2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{8}{15}+4\times\frac{1}{15}=\frac{8}{3}$.

29.【解析】（1） $E(X)=0\times0.4+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.1=1$.

（2）设 $f(x)=p_3x^3+p_2x^2+(p_1-1)x+p_0$，

因为 $p_3+p_2+p_1+p_0=1$，故 $f(x)=p_3x^3+p_2x^2-(p_2+p_0+p_3)x+p_0$，

若 $E(X)\le1$，则 $p_1+2p_2+3p_3\le1$，故 $p_2+2p_3\le p_0$.

$f'(x)=3p_3x^2+2p_2x-(p_2+p_0+p_3)$，

因为 $f'(0)=-(p_2+p_0+p_3)<0$， $f'(1)=p_2+2p_3-p_0\le0$，

故 $f'(x)$有两个不同零点 x_1,x_2， 且 $x_1<0<1\le x_2$，

且 $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$时， $f'(x)>0$； $x\in(x_1,x_2)$时， $f'(x)<0$；

故 $f(x)$在$(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上为增函数，在(x_1,x_2)上为减函数，

若 $x_2=1$，因为 $f(x)$在$(x_2,+\infty)$为增函数且 $f(1)=0$，

而当 $x\in(0,x_2)$时，因为 $f(x)$在(x_1,x_2)上为减函数，故 $f(x)>f(x_2)=f(1)=0$，

故1为 $p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$ 的一个最小正实根，

若 $x_2>1$，因为 $f(1)=0$且在$(0,x_2)$上为减函数，故 1 为 $p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$ 的一个最小正实根，

综上，若 $E(X)\le1$，则 $p=1$.

若 $E(X)>1$，则 $p_1+2p_2+3p_3>1$，故 $p_2+2p_3>p_0$.

此时 $f'(0)=-(p_2+p_0+p_3)<0$， $f'(1)=p_2+2p_3-p_0>0$，

故 $f'(x)$有两个不同零点 x_3,x_4， 且 $x_3<0<x_4<1$，

且 $x\in(-\infty,x_3)\cup(x_4,+\infty)$时， $f'(x)>0$； $x\in(x_3,x_4)$时， $f'(x)<0$；

故 $f(x)$在$(-\infty,x_3)$，$(x_4,+\infty)$上为增函数，在(x_3,x_4)上为减函数，

而 $f(1)=0$，故 $f(x_4)<0$，

又 $f(0)=p_0>0$， 故 $f(x)$在$(0,x_4)$存在一个零点 p， 且 $p<1$.

所以 p 为 $p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$ 的一个最小正实根，此时 $p<1$，

故当$E\left(X\right)>1$时，$p<1$.

（3）意义：每一个该种微生物繁殖后代的平均数不超过 1，则若干代必然灭绝，若繁殖后代的平均数超过 1，则若干代后被灭绝的概率小于 1.

30.【解析】（1）由题意得：$\dfrac{30\times 2+40\times 13+50\times 21+60\times 25+70\times 24+80\times 11+90\times 4}{100}=60.5$，

$\therefore \mu=60.5$ ，$\because \sigma=\sqrt{198}\approx 14$，

$P(Z>88.5)=P(Z>\mu+2\sigma)=\dfrac{1-P(\mu-2\sigma<Z\le\mu+2\sigma)}{2}=0.0228$，

$P(60.5<Z\le 74.5)=\dfrac{P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)}{2}=\dfrac{0.6826}{2}=0.3413$

$\therefore P\left(74.5<Z\le 88.5\right)=0.5-P(60.5<Z<74.5)-P(Z>88.5)$

$=0.5-0.3413-0.0228=0.1359$

（2）由题意知$P\left(Z<\mu\right)=P\left(Z\ge\mu\right)=\dfrac{1}{2}$，.

获赠话费 X 的可能取值为 20，40，50，70，100，

$P\left(X=20\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}$，$P\left(X=40\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{32}$，$P\left(X=50\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$，

$P\left(X=70\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$，$P\left(X=100\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{32}$，.

∴ X 的分布列为：

X	20	40	50	70	100
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

$\therefore E(X)=20\times\dfrac{3}{8}+40\times\dfrac{9}{32}+50\times\dfrac{1}{8}+70\times\dfrac{3}{16}+100\times\dfrac{1}{32}=\dfrac{165}{4}$.