

排列、组合、二项式定理

一、单选题

1. 要安排 3 名学生到 2 个乡村做志愿者, 每名学生只能选择去一个村, 每个村里至少有一名志愿者, 则不同的安排方法共有 ()

- A. 2 种 B. 3 种 C. 6 种 D. 8 种

2. 在 $(\sqrt{x}-2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 ().

- A. -5 B. 5 C. -10 D. 10

3. 已知 $(1-2x)^n$ 的展开式中 x^2 的系数为 40, 则 n 等于 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

4. 若 $(ax + \frac{1}{\sqrt{x}})^8$ 的展开式中 x^2 的项的系数为 $\frac{35}{8}$, 则 x^5 的项的系数为

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{7}{16}$ D. $\frac{7}{32}$

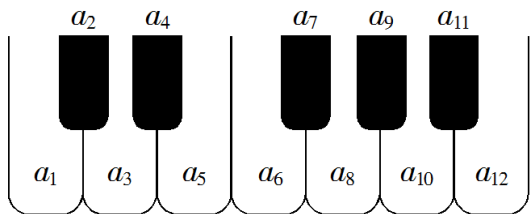
5. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分配到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 则不同的分配方案共有 ()

- A. 60 种 B. 120 种 C. 240 种 D. 480 种

6. $(x + \frac{y^2}{x})(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为 ()

- A. 5 B. 10
C. 15 D. 20

7. 如图, 将钢琴上的 12 个键依次记为 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$. 设 $1 \leq i < j < k \leq 12$. 若 $k-j=3$ 且 $j-i=4$, 则称 a_i, a_j, a_k 为原位大三和弦; 若 $k-j=4$ 且 $j-i=3$, 则称 a_i, a_j, a_k 为原位小三和弦. 用这 12 个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为 ()



- A. 5 B. 8 C. 10 D. 15

8. 楼道里有 9 盏灯, 为了节约用电, 需关掉 3 盏互不相邻的灯, 为了行走安全, 第一盏和最后一盏不关, 则关灯方案的种数为 ()

- A. 10 B. 15 C. 20 D. 24

9. $(3x+1)\left(\frac{1}{x}-1\right)^5$ 的展开式中的常数项为

- A. 14 B. -14
C. 16 D. -16

10. 若展开 $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)$, 则展开式中 a^3 的系数等于 ()

- A. 在 1,2,3,4,5 中所有任取两个不同的数的乘积之和 B. 在 1,2,3,4,5 中所有任取三个不同的数的乘积之和
C. 在 1,2,3,4,5 中所有任取四个不同的数的乘积之和 D. 以上结论都不对

11. 在 $(x-\frac{1}{\sqrt{x}})^8$ 的展开式中, 所有有理项的二项式系数之和为

- A. 16 B. 32 C. 64 D. 128

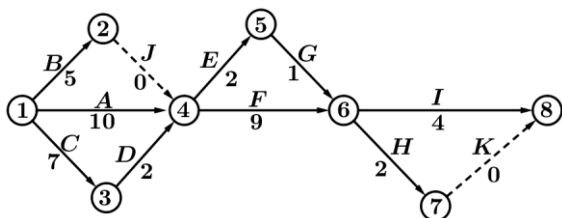
12. $(2^x-1)(2-2^x)^5$ 的展开式中 8^x 的项的系数为 ()

- A. 120 B. 80 C. 60 D. 40

13. $(2x-1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_5(x-1)^5$ 则 $a_3 =$

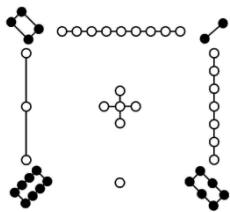
- A. 40 B. 40 C. 80 D. -80

14. 下图是某项工程的网络图(单位:天), 则从开始节点①到终止节点⑧的路径共有 ()



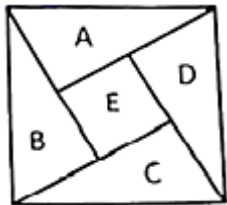
- A. 14 条 B. 12 条 C. 9 条 D. 7 条

15. 如图, 洛书(古称龟书)是阴阳五行术数之源, 在古代传说中有神龟出于洛水, 其甲壳上有此图象, 结构是戴九履一, 左三右七, 二四为肩, 六八为足, 以五居中, 五方白圈皆阳数, 四角黑点为阴数. 若从四个阴数和五个阳数中随机选取 3 个数, 则选取的 3 个数之和为奇数的方法数为 ()



- A. 30 B. 40 C. 42 D. 44

16. 《周髀算经》是中国最古老的天文学、数学著作,公元 3 世纪初中国数学家赵爽创制了“勾股圆方图”(如图),用以证明其中记载的勾股定理.现提供 4 种不同颜色给如图中 5 个区域涂色,规定每个区域只涂一种颜色,相邻区域颜色不同,则不同涂色的方法种数为 ()



- A. 36 B. 48 C. 72 D. 96

二、多选题

17. 已知 $(1-2x)^{2021} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2021}x^{2021}$, 则 ()

- A. 展开式中所有项的二项式系数和为 2^{2021} B. 展开式中所有奇次项系数和为 $\frac{3^{2021}-1}{2}$
C. 展开式中所有偶次项系数和为 $\frac{3^{2021}-1}{2}$ D. $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_{2021}}{2^{2021}} = -1$

18. 关于多项式 $\left(1 + \frac{2}{x} - x\right)^6$ 的展开式, 下列结论正确的是 ()

- A. 各项系数之和为 1 B. 各项系数的绝对值之和为 2^{12}
C. 存在常数项 D. x^3 的系数为 40

19. 在 $(x^2 + x + 1)^3 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2$ 的展开式中, 下列说法正确的是 ()

- A. x^4 的系数为 16 B. 各项系数和为 108
C. 无 x^5 项 D. x^2 的系数为 8

20. 已知 $\left(a + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数的和为 2, 则下列结论正确的有 ()

- A. $a=1$ B. 展开式中常数项为 160
C. 展开式中含 x^2 项的系数为 60 D. 展开式中各项系数的绝对值的和为 1458

三、填空题

21. $(x^2 + \frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是_____ (用数字作答).

22. 4 名同学到 3 个小区参加垃圾分类宣传活动, 每名同学只去 1 个小区, 每个小区至少安排 1 名同学,

则不同的安排方法共有_____种.

23. 在 $\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, x^6 的系数是_____.

24. 设 $(x-1)^{21} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{21}x^{21}$, 则 $a_{10} + a_{11} =$ _____.

25. 若 $x^6 = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_5(x+1)^5 + a_6(x+1)^6$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 =$ _____, $a_5 =$ _____.

26. 由数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成没有重复数字的三位数, 偶数共有_____个, 其中个位数字比十位数字大的偶数共有_____个.

27. 已知多项式 $(x-1)^3 + (x+1)^4 = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, 则 $a_1 =$ _____, $a_2 + a_3 + a_4 =$ _____.

28. 已知 $(1-x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$, 则 x^2 项的二项式系数是_____; $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_6| =$ _____.

四、解答题

29. 设 $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, n \geq 4, n \in \mathbf{N}^*$. 已知 $a_3^2 = 2a_2a_4$.

(1) 求 n 的值;

(2) 设 $(1+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$, 其中 $a, b \in \mathbf{N}^*$, 求 $a^2 - 3b^2$ 的值.

30. 已知 $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各项的二项式系数之和为 32.

(1) 求 n 的值及展开式中 x^2 项的系数

(2) 求 $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 展开式中的常数项

参考答案

1. C 2. C 3. A 4. C 5. C 6. C 7. C 8. A 9. A 10. A 11. D 12. A 13. C 14. B
15. B 16. C

17. ACD 18. BCD 19. AB 20. ACD

21. 240 22. 36 23. 160 24. 0 25. 0 -6 26. 60 36 27. 5; 10. 28. 15 64

29. 【解析】(1) 因为 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$, $n \geq 4$,

$$\text{所以 } a_2 = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, a_3 = C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$a_4 = C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

因为 $a_3^2 = 2a_2 a_4$,

$$\text{所以 } \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right]^2 = 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}, \text{ 解得 } n=5.$$

(2) 由 (1) 知, $n=5$.

$$(1+\sqrt{3})^n = (1+\sqrt{3})^5 = C_5^0 + C_5^1 \sqrt{3} + C_5^2 (\sqrt{3})^2 + C_5^3 (\sqrt{3})^3 + C_5^4 (\sqrt{3})^4 + C_5^5 (\sqrt{3})^5 = a + b\sqrt{3}.$$

解法一: 因为 $a, b \in \mathbf{N}^*$, 所以 $a = C_5^0 + 3C_5^2 + 9C_5^4 = 76, b = C_5^1 + 3C_5^3 + 9C_5^5 = 44$,

$$\text{从而 } a^2 - 3b^2 = 76^2 - 3 \times 44^2 = -32.$$

$$\text{解法二: } (1-\sqrt{3})^5 = C_5^0 + C_5^1 (-\sqrt{3}) + C_5^2 (-\sqrt{3})^2 + C_5^3 (-\sqrt{3})^3 + C_5^4 (-\sqrt{3})^4 + C_5^5 (-\sqrt{3})^5$$

$$= C_5^0 - C_5^1 \sqrt{3} + C_5^2 (\sqrt{3})^2 - C_5^3 (\sqrt{3})^3 + C_5^4 (\sqrt{3})^4 - C_5^5 (\sqrt{3})^5.$$

因为 $a, b \in \mathbf{N}^*$, 所以 $(1-\sqrt{3})^5 = a - b\sqrt{3}$.

$$\text{因此 } a^2 - 3b^2 = (a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3})^5 \times (1-\sqrt{3})^5 = (-2)^5 = -32.$$

30. 【解析】(1) 由已知可得 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n = 32 \Rightarrow n=5$,

$$\text{因为 } T_{r+1} = C_5^r \cdot (2x)^{5-r} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = 2^{5-r} C_5^r \cdot x^{5-\frac{3}{2}r}$$

$$\text{令 } 5 - \frac{3}{2}r = 2 \Rightarrow r = 2,$$

所以 x^2 项的系数为 $2^3 C_5^2 = 80$.

$$(2) \text{ 求 } \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 \text{ 展开式中的常数项, 即 } 5 - \frac{3}{2}r = -1 \text{ 或 } 5 - \frac{3}{2}r = \frac{1}{2},$$

所以 $r=4$ 或 $r=3$, 故常数项为 $2 \cdot C_5^4 - 2^2 \cdot C_5^3 = -30$.