解析几何综合

一、单选题

1．在平面内，A，B 是两个定点，C 是动点，若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，则点 C 的轨迹为（　　）

A．圆　　B．椭圆　　C．抛物线　　D．直线

2．设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 交于 D，E 两点，若 $OD\perp OE$，则 C 的焦点坐标为（　　）

A．$\left(\frac{1}{4},0\right)$　　B．$\left(\frac{1}{2},0\right)$　　C．$(1,0)$　　D．$(2,0)$

3．设 B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的上顶点，点 P 在 C 上，则 $|PB|$ 的最大值为（　　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\sqrt{6}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

4．设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\sqrt{5}$．P 是 C 上一点，且 $F_1P\perp F_2P$．若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4，则 $a=$（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

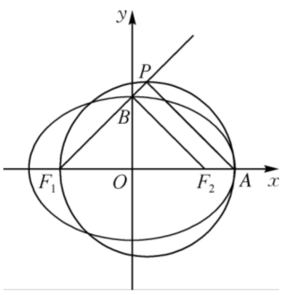
5．设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D,E 两点，若 $\triangle ODE$ 的面积为 8，则 C 的焦距的最小值为（　　）

A．4　　B．8　　C．16　　D．32

6．已知直线 $y=\sqrt{3}x$ 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 相交于不同的两点 A 和 B，F 为双曲线 C 的左焦点，且满足 $AF\perp BF$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}+1$　　D．$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

7．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，右顶点为 A，上顶点为 B，以线段 F_1A 为直径的圆交线段 F_1B 的延长线于点 P，若 $F_2B//AP$ 且线段 AP 的长为 $2+\sqrt{2}$，则该椭圆方程为（　　）



A．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　　B．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1$　　C．$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

8．已知直线 l 与圆 $x^2+y^2=8$ 相切，与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A，B 两点，$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$（O 为坐标原点）直线 l 方程为（　　）

A．$x+y-4=0$ 或 $x-y+4=0$　　B．$x-y-4=0$ 或 $x+y-4=0$

C．$x+2y+4=0$ 或 $x-2y-4=0$　　D．$x-2y+4=0$ 或 $x+2y+4=0$

9．已知直线 l：$y=x-1$ 与抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 相交于 A、B 两点，若 AB 的中点为 N，且抛物线 C 上存在点 M，使得 $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{ON}$（$O$ 为坐标原点），则抛物线 C 的方程为（　　）

A．$y^2=8x$　　B．$y^2=4x$　　C．$y^2=2x$　　D．$y^2=x$

10．已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，其准线 l 与 x 轴相交于点 M，过点 M 作斜率为 k 的直线与抛物线 C 相交于 A，B 两点，若 $\angle AFB=60°$，则 $k=$（　　）

A．$\pm\frac{1}{2}$　　B．$\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C．$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

11．已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，$M(4,3\sqrt{5})$，直线 MF 与 y 轴交于点 N，点 P 为双曲线上一动点，且 $|y_p|<3\sqrt{5}$，直线 MP 与以 MN 为直径的圆交于点 M、Q，则 $|PM|\cdot|PQ|$ 的最大值为（　　）

A．48　　B．49　　C．50　　D．42

二、多选题

12．设椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，直线 $y=m\left(0<m<\sqrt{3}\right)$ 与椭圆交于 A，B 两点，则（　　）

A．$|AF|+|BF|$ 为定值　　B．$\triangle ABF$ 的周长的取值范围是 $[6,12]$

C．当 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\triangle ABF$ 为直角三角形　　D．当 $m=1$ 时，$\triangle ABF$ 的面积为 $\sqrt{6}$

13．设 F_1,F_2 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过左焦点 F_1 且斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{7}$ 的直线 l 与 C 在第一象限相交于一点 P，则下列说法正确的是（　　）

A．直线 l 倾斜角的余弦值为 $\frac{7}{8}$　　B．若 $|F_1P|=|F_1F_2|$，则 C 的离心率 $e=\frac{4}{3}$

C．若 $|PF_2|=|F_1F_2|$，则 C 的离心率 $e=2$　　D．$\triangle PF_1F_2$ 不可能是等边三角形

14．已知 P 为抛物线 $y^2=4x$ 上一动点，F 为抛物线的焦点，$M\left(2,1\right)$，直线 l 与抛物线交于点 A,B，下列结论正确的是（　　）

A．$|MP|+|PF|$的最小值为 4

B．若直线l过点F，则以AF为直径的圆与y轴相切

C．存在直线l，使得A,B两点关于直线$x-y+1=0$对称

D．设抛物线准线与x轴交点为Q，若直线l过点F，则有$\angle AQF=\angle BQF$

15．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，直线$l$与圆$x^2+y^2=b^2$相切于点$P$，与椭圆相交于$A,B$两点，点A 在$x$轴上方，则（　　）

A．弦长$|AB|$的最大值是$\dfrac{bc}{a}$

B．若l方程为$y=bx+a$，则$c=b^2$

C．若直线l过右焦点F_2，且切点P恰为线段AF_2的中点，则椭圆的离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

D．若圆$x^2+y^2=b^2$经过椭圆的两个焦点，且$|AF_1|+|AF_2|=2\sqrt{2}$，设点P在第一象限，则$\triangle ABF_2$的周长是定值$2\sqrt{2}$

三、填空题

16．椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$与双曲线$\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$有公共的焦点，则$b=$______.

17．双曲线$\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$与椭圆$\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$有相同的焦点，且左、右焦点分别为$F_1,F_2$，它们在第一象限的交点为$P$，若$\sin\angle F_1PF_2=2\sin\angle PF_1F_2$，且椭圆与双曲线的离心率互为倒数，则该双曲线的离心率为____________.

18．斜率为$-\dfrac{1}{3}$的直线l与椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）相交于A，$B$两点，线段$AB$的中点坐标为$(1,1)$，则椭圆$C$的离心率等于______.

19．过抛物线C：$x^2=4y$的准线上任意一点P作抛物线的切线PA，PB，切点分别为A，B，则A 点到准线的距离与B点到准线的距离之和的最小值是______.

20．已知椭圆M:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，双曲线$N$:$\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$．若双曲线$N$的两条渐近线与椭圆$M$的四个交点及椭圆$M$的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，则椭圆$M$的离心率为__________；双曲线$N$的离心率为__________.

四、解答题

21．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 M（2，3），点 A 为其左顶点，且 AM 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，

（1）求 C 的方程；

（2）点 N 为椭圆上任意一点，求△AMN 的面积的最大值.

22．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,-3)$，右焦点为 F，且 $|OA|=|OF|$，其中 O 为原点.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，点 B 在椭圆上（B 异于椭圆的顶点），直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P，且 P 为线段 AB 的中点．求直线 AB 的方程.

23．已知抛物线$C:y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为 F，A 为 C 上异于原点的任意一点，过点 A 的直线 l 交 C 于另一点 B，交 x 轴的正半轴于点 D，且有$|FA|=|FD|$.当点 A 的横坐标为 3 时，$\triangle ADF$ 为正三角形.

（1）求 C 的方程；

（2）若直线$l_1//l$，且l_1和 C 有且只有一个公共点 E，证明直线 AE 过定点，并求出定点坐标.

24．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的点到焦点的最大距离为 3，最小距离为 1

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过椭圆 C 右焦点 F_2，作直线 l 与椭圆交于 A，B 两点（A，B 不为长轴顶点），过点 A，B 分别作直线 $x=4$ 的垂线，垂足依次为 E，F，且直线 AF，BE 相交于点 G.

①证明：G 为定点；

②求△ABG 面积的最大值.

25．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$过点$A(-2,-1)$，且$a=2b$．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过点$B(-4,0)$的直线l交椭圆C于点M,N,直线MA,NA分别交直线$x=-4$于点P,Q．求$\dfrac{|PB|}{|BQ|}$的值．

26．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 A（2，1）．

（1）求 C 的方程；

（2）点 M，N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足．证明：存在定点 Q，使得$|DQ|$为定值．

27．设动点M在直线$y=0$和$y=-2$上的射影分别为点N和R，已知$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{OM}^2$，其中$O$为坐标原点.

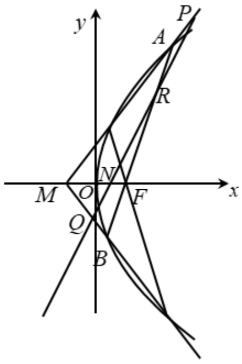
（1）求动点M的轨迹E的方程；

（2）过直线$x-y-2=0$上的一点P作轨迹E的两条切线PA和PB(A，B为切点)，求证：直线AB经过定点.

28．如图，已知F是抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点，M是抛物线的准线与x轴的交点，且$|MF|=2$，

（1）求抛物线的方程；

（2）设过点F的直线交抛物线与A、B两点，斜率为2的直线l与直线MA,MB,AB，x轴依次交于点P，Q，R，N，且$|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$，求直线l在x轴上截距的范围.



29．已知抛物线$C:x^2=2py\left(p>0\right)$的焦点为$F$，且$F$与圆$M:x^2+(y+4)^2=1$上点的距离的最小值为$4$.

（1）求p；

（2）若点P在M上，PA,PB是C的两条切线，A,B是切点，求$\triangle PAB$面积的最大值.

30．曲线C上任意一点P到点$F(2,0)$的距离与它到直线$x=4$的距离之比等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，过点$M(4,0)$且与x轴不重合的直线l与C交于不同的两点A,B.

（1）求C的方程；

（2）求证：$\triangle ABF$内切圆的圆心在定直线上.

参考答案

1．A　2．B　3．A　4．A　5．B　6．C　7．D　8．B　9．B　10．D　11．A

12．ACD　13．AD　4．BD　15．BCD

16．4　17．$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　18．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　19．4　20．$\sqrt{3}-1$　　2

21．【解析】(1)由题意可知直线 AM 的方程为：$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x-2y=-4$.

当 $y=0$ 时，解得 $x=-4$，所以 $a=4$，

椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $M(2,3)$，可得 $\frac{4}{16}+\frac{9}{b^2}=1$，

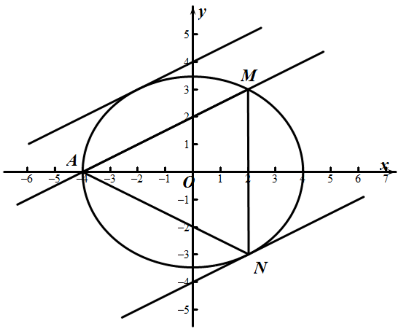
解得 $b^2=12$.

所以 C 的方程：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)设与直线 AM 平行的直线方程为：$x-2y=m$，

如图所示，当直线与椭圆相切时，与 AM 距离比较远的直线与椭圆的切点为 N，此时△AMN 的面积取得最大值.

联立直线方程 $x-2y=m$ 与椭圆方程 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，



可得：$3(m+2y)^2+4y^2=48$，

化简可得：$16y^2+12my+3m^2-48=0$，

所以 $\Delta=144m^2-4\times16(3m^2-48)=0$，即 $m^2=64$，解得 $m=\pm8$，

与 AM 距离比较远的直线方程：$x-2y=8$，

直线 AM 方程为：$x-2y=-4$，

点 N 到直线 AM 的距离即两平行线之间的距离，

利用平行线之间的距离公式可得：$d=\frac{8+4}{\sqrt{1+4}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，

由两点之间距离公式可得 $|AM|=\sqrt{(2+4)^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

所以△AMN 的面积的最大值：$\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}=18$.

22．【解析】(Ⅰ) ∵椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,-3)$，

$\therefore b=3$，

由 $|OA|=|OF|$，得 $c=b=3$，

又由 $a^2=b^2+c^2$，得 $a^2=3^2+3^2=18$，

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$；

（Ⅱ）$\because$ 直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P，所以 $CP\perp AB$，

根据题意可知，直线 AB 和直线 CP 的斜率均存在，

设直线 AB 的斜率为 k，则直线 AB 的方程为 $y+3=kx$，即 $y=kx-3$，

$\begin{cases} y=kx-3 \\ \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}$，消去 y，可得 $\left(2k^2+1\right)x^2-12kx=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{12k}{2k^2+1}$.

将 $x=\frac{12k}{2k^2+1}$ 代入 $y=kx-3$，得 $y=k\cdot\frac{12k}{2k^2+1}-3=\frac{6k^2-3}{2k^2+1}$，

所以，点 B 的坐标为 $\left(\frac{12k}{2k^2+1},\frac{6k^2-3}{2k^2+1}\right)$，

因为 P 为线段 AB 的中点，点 A 的坐标为 $(0,-3)$，

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{6k}{2k^2+1},\frac{-3}{2k^2+1}\right)$，

由 $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，得点 C 的坐标为 $(1,0)$，

所以，直线 CP 的斜率为 $k_{CP}=\frac{\frac{-3}{2k^2+1}-0}{\frac{6k}{2k^2+1}-1}=\frac{3}{2k^2-6k+1}$，

又因为 $CP\perp AB$，所以 $k\cdot\frac{3}{2k^2-6k+1}=-1$，

整理得 $2k^2-3k+1=0$，解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=1$.

所以，直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}x-3$ 或 $y=x-3$.

23.【解析】(1) 由题意知 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，设 $D(t,0)(t>0)$，则 FD 的中点为 $\left(\frac{p+2t}{4},0\right)$.

因为 $|FA|=|FD|$，由抛物线的定义可知 $3+\frac{p}{2}=\left|t-\frac{p}{2}\right|$，

解得 $t=3+p$ 或 $t=-3$（舍去）.

由 $\frac{p+2t}{4}=3$，解得 $p=2$，

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

（2）由（1）知 $F(1,0)$，设 $A(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$，$D(x_D,0)(x_D>0)$，

因为$|FA|=|FD|$，则$|x_D-1|=x_0+1$，

由$x_D>0$得$x_D=x_0+2$，故$D(x_0+2,0)$，

故直线AB的斜率$k_{AB}=-\dfrac{y_0}{2}$，

因为直线l_1和直线AB平行，

设直线l_1的方程为$y=-\dfrac{y_0}{2}x+b$，

代入抛物线的方程得$y^2+\dfrac{8}{y_0}y-\dfrac{8b}{y_0}=0$，

由题意$\Delta=\dfrac{64}{y_0^2}+\dfrac{32b}{y_0}=0$，得$b=-\dfrac{2}{y_0}$；

设$E(x_E,y_E)$，则$y_E=-\dfrac{4}{y_0}$，$x_E=\dfrac{4}{y_0^2}$.

当$y_0^2\neq 4$时，$k_{AE}=\dfrac{y_E-y_0}{x_E-x_0}=\dfrac{4y_0}{y_0^2-4}$，

可得直线AE的方程为$y-y_0=\dfrac{4y_0}{y_0^2-4}(x-x_0)$，

由$y_0^2=4x_0$，整理得$y=\dfrac{4y_0}{y_0^2-4}(x-1)$，直线$AE$恒过点$F(1,0)$.

当$y_0^2=4$时，直线AE的方程为$x=1$，过点$F(1,0)$，

所以直线AE过定点$F(1,0)$.

24.【解析】(1) 设椭圆的半焦距为c，由题意得$\begin{cases}a+c=3\\a-c=1\end{cases}$，解得$a=2$，$c=1$，

所以椭圆的方程为$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) ①由 (1) 知$F_2(1,0)$，

当直线l斜率不存在时，l方程为$x=1$，

可得$A\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$B\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$；可得$E\left(4,\dfrac{3}{2}\right)$，$F\left(4,-\dfrac{3}{2}\right)$，

即有AF，BE相交于点$G\left(\dfrac{5}{2},0\right)$；

当直线l斜率存在且不为零时，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$E(4,y_1)$，$F(4,y_2)$，

l方程为$y=k(x-1)$，联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$可得$3x^2+4k^2(x-1)^2=12$，

化简得$\left(3+4k^2\right)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

由韦达定理得$x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

而直线$AF: y-y_2=\frac{y_2-y_1}{4-x_1}(x-4)$，$BE: y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-4}(x-4)$相交时，

联立作差可得$x-4=\frac{16-4\left(x_1+x_2\right)+x_1\cdot x_2}{\left(x_1+x_2\right)-8}=\frac{36k^2+36}{-24k^2-24}=-\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{2}$，

且$2y-\left(y_1+y_2\right)=-\frac{3}{2}\left(y_1-y_2\right)\left(\frac{1}{x_1-4}-\frac{1}{x_2-4}\right)$，

则代入$x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

化简得$2y=-\frac{3}{2}\left(y_1-y_2\right)\left(\frac{1}{x_1-4}-\frac{1}{x_2-4}\right)+\left(y_1+y_2\right)$

$=-\frac{3}{2}k\left(x_1-x_2\right)\frac{x_2-x_1}{x_1x_2-4\left(x_1+x_2\right)+16}+k\left(x_1+x_2-2\right)=0$

即AF，BE相交于点$G\left(\frac{5}{2},0\right)$，

综上可证G为定点$\left(\frac{5}{2},0\right)$.

②直线l斜率不存在时，可知$S_{\triangle ABG}=\frac{9}{4}$；

而当斜率不为零时，由（i）可得

$S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}\left|F_2G\right|\left|y_1-y_2\right|=\frac{3}{4}\left|y_1-y_2\right|=\frac{3}{4}\left|k\left(x_1-x_2\right)\right|$

$=\frac{3}{4}\sqrt{k^2\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]}=\frac{9}{4}\sqrt{\frac{16k^2\left(k^2+1\right)}{\left(3+4k^2\right)^2}}$

$=\frac{9}{4}\sqrt{\frac{16k^2\left(k^2+1\right)}{16k^4+24k^2+9}}<\frac{9}{4}\sqrt{\frac{16k^2\left(k^2+1\right)}{16k^4+16k^2}}=\frac{9}{4}$.

故$\triangle ABG$面积的最大值为$\frac{9}{4}$.

25.【解析】(1)设椭圆方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，由题意可得：

$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ a=2b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a^2=8\\ b^2=2\end{cases}$，

故椭圆方程为：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 MN 的方程为：$y=k(x+4)$，

与椭圆方程 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立可得：$x^2+4k^2(x+4)^2=8$，

即：$(4k^2+1)x^2+32k^2x+(64k^2-8)=0$，

则：$x_1+x_2=\frac{-32k^2}{4k^2+1},x_1x_2=\frac{64k^2-8}{4k^2+1}$.

直线 MA 的方程为：$y+1=\frac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)$，

令 $x=-4$ 可得：$y_P=-2\times\frac{y_1+1}{x_1+2}-1=-2\times\frac{k(x_1+4)+1}{x_1+2}-\frac{x_1+2}{x_1+2}=\frac{-(2k+1)(x_1+4)}{x_1+2}$，

同理可得：$y_Q=\frac{-(2k+1)(x_2+4)}{x_2+2}$.

很明显 $y_Py_Q<0$，且：$\frac{|PB|}{|PQ|}=\left|\frac{y_P}{y_Q}\right|$，注意到：

$$y_P+y_Q=-(2k+1)\left(\frac{x_1+4}{x_1+2}+\frac{x_2+4}{x_2+2}\right)=-(2k+1)\times\frac{(x_1+4)(x_2+2)+(x_2+4)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)},$$

而：$(x_1+4)(x_2+2)+(x_2+4)(x_1+2)=2\left[x_1x_2+3(x_1+x_2)+8\right]$

$$=2\left[\frac{64k^2-8}{4k^2+1}+3\times\left(\frac{-32k^2}{4k^2+1}\right)+8\right]$$

$$=2\times\frac{(64k^2-8)+3\times(-32k^2)+8(4k^2+1)}{4k^2+1}=0,$$

故 $y_P+y_Q=0,y_P=-y_Q$.从而 $\frac{|PB|}{|BQ|}=\left|\frac{y_P}{y_Q}\right|=1$.

26.【解析】(1)由题意可得：$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得：$a^2=6,b^2=c^2=3$，故椭圆方程为：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

因为 $AM\perp AN$，$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，即 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$,①

当直线 MN 的斜率存在时，设方程为 $y=kx+m$,如图 1.

代入椭圆方程消去 y 并整理得：$\left(1+2k^2\right)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}, x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}$ ②，

根据 $y_1=kx_1+m, y_2=kx_2+m$，代入①整理可得：

$\left(k^2+1\right)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0$

将②代入，$\left(k^2+1\right)\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}+(km-k-2)\left(-\dfrac{4km}{1+2k^2}\right)+(m-1)^2+4=0$，

整理化简得 $(2k+3m+1)(2k+m-1)=0$，

$\because A(2,1)$ 不在直线 MN 上，$\therefore 2k+m-1\neq 0$，

$\therefore 2k+3m+1=0$，$k\neq 1$，

于是 MN 的方程为 $y=k\left(x-\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{1}{3}$，

所以直线过定点直线过定点 $E\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

当直线 MN 的斜率不存在时，可得 $N(x_1,-y_1)$，如图 2.

代入 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$ 得 $(x_1-2)^2+1-y_2^2=0$，

结合 $\dfrac{x_1^2}{6}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，解得 $x_1=2$（舍），$x_1=\dfrac{2}{3}$，

此时直线 MN 过点 $E\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$，

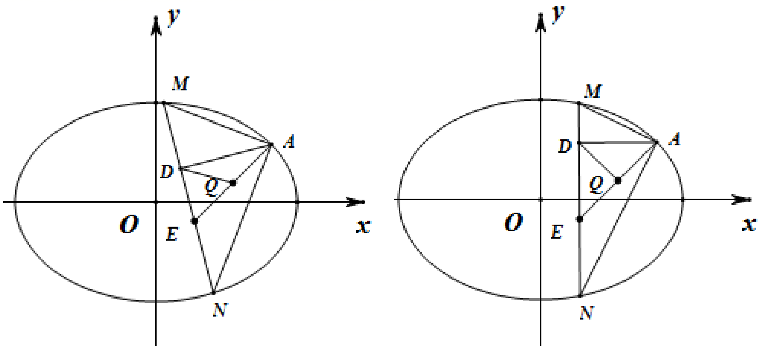


图1　图2

由于 AE 为定值，且 $\triangle ADE$ 为直角三角形，AE 为斜边，

所以 AE 中点 Q 满足 $|QD|$ 为定值（AE 长度的一半 $\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(2-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$）.

由于 $A(2,1), E\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$，故由中点坐标公式可得 $Q\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

故存在点$Q\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，使得$|DQ|$为定值.

27.【解析】（1）设$M(x,y)$，则$N(x,0),R(x,-2)$，

所以$\overrightarrow{OM}=(x,y),\overrightarrow{MN}=(0,-y),\overrightarrow{MR}=(0,-2-y)$，

由条件可得$-y(-y-2)=x^2+y^2$，

整理可得点M的轨方程为$x^2=2y$；

（2）由（1）知，$y=\dfrac{1}{2}x^2$，求导可得$y'=x$，

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则切线PA的方程为$y-\dfrac{x_1^{\ 2}}{2}=x_1(x-x_1)$，

即$y=x_1x-\dfrac{x_1^{\ 2}}{2}$①，

同理可得切线PB的方程为$y=x_2x-\dfrac{x_2^{\ 2}}{2}$②，

联立①②，解得点P的坐标为$(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{2})$，

因为点P在直线$x-y-2=0$上，

所以$\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{x_1x_2}{2}-2=0$，即$x_1x_2=x_1+x_2-4$，

又直线AB的斜率$k=\dfrac{\dfrac{x_2^{\ 2}}{2}-\dfrac{x_1^{\ 2}}{2}}{x_2-x_1}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，

所以直线AB的方程为：$y-\dfrac{x_1^{\ 2}}{2}=\dfrac{x_1+x_2}{2}(x-x_1)$，

即$y=\dfrac{(x_1+x_2)x-x_1x_2}{2}$，又$x_1x_2=x_1+x_2-4$，

代入可得$y=\dfrac{(x_1+x_2)(x-1)}{2}+2$，

所以直线AB过定点$(1,2)$.

28.【解析】（1）因为$|MF|=2$，故$p=2$，故抛物线的方程为：$y^2=4x$.

（2）设$AB:x=ty+1$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$N(n,0)$，

所以直线$l:x=\dfrac{y}{2}+n$，由题设可得$n\neq 1$且$t\neq\dfrac{1}{2}$.

由$\begin{cases}x=ty+1\\y^2=4x\end{cases}$可得$y^2-4ty-4=0$，故$y_1y_2=-4,y_1+y_2=4t$，

因为$|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$，故$\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_R|\right)^2=\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_P|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_Q|$，故$y_R^2=|y_P|\cdot|y_Q|$.

又$MA: y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，由$\begin{cases} y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1) \\ x=\frac{y}{2}+n \end{cases}$可得$y_P=\frac{2(n+1)y_1}{2x_1+2-y_1}$，

同理$y_Q=\dfrac{2(n+1)y_2}{2x_2+2-y_2}$，

由$\begin{cases} x=ty+1 \\ x=\frac{y}{2}+n \end{cases}$可得$y_R=\dfrac{2(n-1)}{2t-1}$，

所以$\left[\frac{2(n-1)}{2t-1}\right]^2=\left|\frac{2(n+1)y_2}{2x_2+2-y_2}\times\frac{2(n+1)y_1}{2x_1+2-y_1}\right|$，

整理得到$\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2=(2t-1)^2\left|\dfrac{y_1y_2}{(2x_2+2-y_2)(2x_1+2-y_1)}\right|$，

$$=\frac{4(2t-1)^2}{\left|\left(\frac{y_2^2}{2}+2-y_2\right)\left(\frac{y_1^2}{2}+2-y_1\right)\right|}$$

$$=\frac{4(2t-1)^2}{\left|\frac{y_2^2y_1^2}{4}+(y_2+y_1)^2-y_2y_1-\frac{y_2+y_1}{2}\times y_1y_2-2(y_2+y_1)+4\right|}=\frac{(2t-1)^2}{3+4t^2}$$

故$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2=\frac{3+4t^2}{(2t-1)^2}$，

令$s=2t-1$，则$t=\dfrac{s+1}{2}$且$s\neq0$，

故$\frac{3+4t^2}{(2t-1)^2}=\frac{s^2+2s+4}{s^2}=1+\frac{2}{s}+\frac{4}{s^2}=4\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$，

故$\begin{cases} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^2\geq\dfrac{3}{4} \\ n\neq1 \end{cases}$即$\begin{cases} n^2+14n+1\geq0 \\ n\neq1 \end{cases}$，

解得$n\leq-7-4\sqrt{3}$或$-7+4\sqrt{3}\leq n<1$或$n>1$.

故直线l在x轴上的截距的范围为$n\leq-7-4\sqrt{3}$或$-7+4\sqrt{3}\leq n<1$或$n>1$.

29.【解析】（1）抛物线C的焦点为$F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，$|FM|=\dfrac{p}{2}+4$，

所以，F与圆$M: x^2+(y+4)^2=1$上点的距离的最小值为$\dfrac{p}{2}+4-1=4$，解得$p=2$；

（2）抛物线C的方程为$x^2=4y$，即$y=\dfrac{x^2}{4}$，对该函数求导得$y'=\dfrac{x}{2}$，

设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$P(x_0,y_0)$，

直线 PA 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1x}{2}-y_1$，即 $x_1x-2y_1-2y=0$，

同理可知，直线 PB 的方程为 $x_2x-2y_2-2y=0$，

由于点 P 为这两条直线的公共点，则 $\begin{cases}x_1x_0-2y_1-2y_0=0\\x_2x_0-2y_2-2y_0=0\end{cases}$，

所以，点 A 、 B 的坐标满足方程 $x_0x-2y-2y_0=0$，

所以，直线 AB 的方程为 $x_0x-2y-2y_0=0$，

联立 $\begin{cases}x_0x-2y-2y_0=0\\y=\frac{x^2}{4}\end{cases}$，可得 $x^2-2x_0x+4y_0=0$，

由韦达定理可得 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0$，

所以，$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{4x_0^2-16y_0}=\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}$，

点 P 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$，

所以，$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}\cdot\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}=\frac{1}{2}(x_0^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}$，

$\because x_0^2-4y_0=1-(y_0+4)^2-4y_0=-y_0^2-12y_0-15=-(y_0+6)^2+21$，

由已知可得 $-5\le y_0\le-3$，所以，当 $y_0=-5$ 时，$\triangle PAB$ 的面积取最大值 $\frac{1}{2}\times20^{\frac{3}{2}}=20\sqrt{5}$.

30.【解析】(1) 设 $P(x,y)$，由题意：$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|x-4|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(x-2)^2+y^2=\frac{1}{2}(x-4)^2$，

化简得：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，即 C 的方程为：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 设直线 $l: x=my+4$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，将 l 代入 C 得：$(m^2+2)y^2+8my+8=0$，

$$\therefore\begin{cases}\Delta=64m^2-32(m^2+2)>0\Rightarrow m^2>2\\y_1+y_2=-\frac{8m}{m^2+2}\\y_1\cdot y_2=\frac{8}{m^2+2}\end{cases}$$

设直线 AF 与 BF 的斜率分别为 k_1,k_2，则 $k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1}{my_1+2}+\frac{y_2}{my_2+2}$

$=\frac{2my_1y_2+2(y_1+y_2)}{(my_1+2)(my_2+2)}=\frac{2m\cdot\frac{8}{m^2+2}+2\left(-\frac{8m}{m^2+2}\right)}{(my_1+2)(my_2+2)}=0$.

$\therefore k_1=-k_2$，则 $\angle BFM=\pi-\angle AFM$，$\therefore$ 直线 $x=2$ 平分 $\angle AFB$，而三角形内心在 $\angle AFB$ 的角平分线上，$\therefore\triangle ABF$ 内切圆的圆心在定直线 $x=2$ 上.